数学補習プログラム（社会人院生向け）
練習問題【2 日目】

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

講義資料や参考書などを参照しても構いません．

1. 次の関数の x と y に関する 1 次偏導関数を求めなさい．
   （a）$z = (x^2 - y^3)(x - y)$
   （b）$z = \dfrac{5xy}{x - y}$
   （c）$z = 2(3x^2 + y^3)^{\frac{1}{2}}$
   Hint: $u = 3x^2 + y^3$ として，合成関数の偏微分を適用する．
   （d）$z = (x^2 - 4y)^8$
   Hint: $u = x^2 - 4y$ として，合成関数の偏微分を適用する．
2. 次の式について，陰関数定理を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．
   （a）$F(x, y) = 6x^5 - y - 1 = 0$
   （b）$F(x, y) = x^5 + e^y = 0$
   （c）$F(x, y) = x^2 + 3^y - 4 = 0$
3. 2 変数関数 $z = f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2$ が与えられているとする．
   （a）z の 1 次偏導関数を全て求めなさい．
   （b）z の 2 次偏導関数と交差偏導関数を全て求めなさい．
   （c）z の 1 階全微分を求めなさい．
   （d）z の 2 階全微分を求めなさい．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題【2 日目】解答

1.（a）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - y^3\right]\right)(x-y) + (x^2-y^3)\frac{\partial}{\partial x}[x-y] \\
&= (2x^{2-1} - 0)(x-y) + (x^2-y^3)(1x^{1-1} - 0) \\
&= 2x(x-y) + (x^2-y^3)\cdot x^0 \\
&= 2x^2 - 2xy + x^2 - y^3 \\
&= 3x^2 - 2xy - y^3, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - y^3\right]\right)(x-y) + (x^2-y^3)\frac{\partial}{\partial y}[x-y] \\
&= (0 - 3y^{3-1})(x-y) + (x^2-y^3)(0 - 1y^{1-1}) \\
&= -3y^2(x-y) + (x^2-y^3)\cdot(-y^0) \\
&= -3y^2x + 3y^3 - (x^2-y^3) \\
&= -3xy^2 + 3y^3 - x^2 + y^3 \\
&= -x^2 - 3xy^2 + 4y^3.
\end{aligned}
$$

（b）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}[5xy]\right)(x-y) - 5xy\frac{\partial}{\partial x}[x-y]}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5\cdot 1x^{1-1}y(x-y) - 5xy(1x^{1-1} - 0)}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5x^0y(x-y) - 5xyx^0}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5y(x-y) - 5xy}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5xy - 5y^2 - 5xy}{(x-y)^2} \\
&= -\frac{5y^2}{(x-y)^2}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y}[5xy]\right)(x-y) - 5xy\frac{\partial}{\partial y}[x-y]}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5x\cdot 1y^{1-1}(x-y) - 5xy(0 - 1y^{1-1})}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5xy^0(x-y) - 5xy\cdot(-y^0)}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5x(x-y) + 5xy}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5x^2 - 5xy + 5xy}{(x-y)^2} \\
&= \frac{5x^2}{(x-y)^2}.
\end{aligned}
$$

（c）$u = 3x^2 + y^3$ とすると，$z = 2u^{\frac{1}{2}}$ となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{d}{du}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2 + y^3\right] \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3 \cdot 2x^{2-1} + 0) \\
&= u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \\
&= 6x(3x^2 + y^3)^{-\frac{1}{2}}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{d}{du}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + y^3\right] \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (0 + 3y^{3-1}) \\
&= u^{-\frac{1}{2}} \cdot 3y^2 \\
&= 3y^2(3x^2 + y^3)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

（d）$u = x^2 - 4y$ とすると，$z = u^8$ となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{d}{du}\left[u^8\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - 4y\right] \\
&= 8u^{8-1} \cdot (2x^{2-1} - 0) \\
&= 8u^7 \cdot 2x \\
&= 16x(x^2 - 4y)^7, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{d}{du}\left[u^8\right] \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - 4y\right] \\
&= 8u^{8-1} \cdot (0 - 4 \cdot 1y^{1-1}) \\
&= 8u^7 \cdot (-4y^0) \\
&= -32(x^2 - 4y)^7.
\end{aligned}
$$

2.（a）$F(x, y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = 6 \cdot 5x^{5-1} - 0 - 0 = 30x^4, \\
F_y &= \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = 0 - 1y^{1-1} - 0 = -y^0 = -1
\end{aligned}
$$

となる．よって，$F_y = -1 \neq 0$ である．したがって，陰関数定理が適用でき，

$$
\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{30x^4}{-1} = 30x^4
$$

である．

（b）$F(x, y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = 5x^{5-1} + 0 = 5x^4,$$
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = 0 + e^y = e^y$$

となる．ここで，e^y は自然指数関数なので，自然指数関数の性質より，$F_y = e^y > 0$, つまり $F_y \neq 0$ である．よって，陰関数定理が適用でき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{5x^4}{e^y}$$

である．

（c）$F(x, y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = 2x^{2-1} + 0 - 0 = 2x,$$
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = 0 + 3^y \ln 3 - 0 = 3^y \ln 3$$

となる．ここで，3^y は指数関数なので，指数関数の性質より，$3^y > 0$ である．また，$\ln 3 > 0$ である．よって，$F_y = 3^y \ln 3 > 0$, つまり $F_y \neq 0$ である．よって，陰関数定理が適用でき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{3^y \ln 3}$$

である．

3.（a）

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1}y^2 = xy^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 \cdot 2y^{2-1} = x^2 y.$$

（b）(a) より，2 次偏導関数は，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy^2\right] = 1x^{1-1}y^2 = x^0 y^2 = y^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 y\right] = x^2 \cdot 1y^{1-1} = x^2 y^0 = x^2$$

となる．また，交差偏導関数は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 y\right] = 2x^{2-1}y = 2xy.$$

ヤングの定理より，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy.$$

である．

（c）(a) より，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = xy^2 dx + x^2 y dy.$$

（d）(c) より，dz の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$\frac{\partial}{\partial x}[dz] = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy^2dx + x^2ydy\right] = 1x^{1-1}y^2dx + 2x^{2-1}ydy = x^0y^2dx + 2xydy = y^2dx + 2xydy,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[dz] = \frac{\partial}{\partial y}\left[xy^2dx + x^2ydy\right] = x \cdot 2y^{2-1}dx + x^2 \cdot 1y^{1-1}dy = 2xydx + x^2y^0dy = 2xydx + x^2dy$$

となる．よって，z の 2 階全微分は，

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[dz]dx + \frac{\partial}{\partial y}[dz]dy \\
&= (y^2dx + 2xydy)dx + (2xydx + x^2dy)dy \\
&= y^2(dx)^2 + 2xy(dy)(dx) + 2xy(dx)(dy) + x^2(dy)^2 \\
&= y^2dx^2 + 4xydxdy + x^2dy^2
\end{aligned}$$

である．