数学補習プログラム（社会人院生向け）
練習問題【3 日目】

北村友宏 *

2016 年 3 月 20 日

講義資料や参考書などを参照しても構いません．
※裏面にも問題があります．

1. 次の表現を，総和記号を用いずに表しなさい．
   （a） $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} x_i$
   （b） $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i x_i y_i$
2. 次の表現を，総和記号を用いて書き換えなさい．
   （a） $x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + \cdots + x_n(y_n - z_n)$
   （b） $x_1^2 y_j + x_2^2 y_j + x_3^2 y_j + x_4^2 y_j + x_5^2 y_j$
   （c） $x_{2j} y_{k2} + x_{3j} y_{k3} + x_{4j} y_{k4}$
3. 次の行列を求めなさい．
   （a） $-5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$
   （b） $3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$
4. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ を求めなさい．
5. 次の行列式の値を求めなさい．
   （a） $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}$
   （b） $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$
   （c） $\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

（d）$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

（a）$\boldsymbol{A}$ の各要素の余因子を全て求めなさい．

（b）$\boldsymbol{A}$ の行列式を求めなさい．

Hint: (a) で求めた余因子を利用し，どれかの行または列に沿ってラプラス展開する．

（c）$\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めなさい．

練習問題【3 日目】解答

1.（a）$\displaystyle\sum_{i=0}^{3} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3.$

（b）$\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i x_i y_i = a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2.$

2.（a）$\displaystyle x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + \cdots + x_n(y_n - z_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - z_i).$

（b）$\displaystyle x_1^2 y_j + x_2^2 y_j + x_3^2 y_j + x_4^2 y_j + x_5^2 y_j = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_j \left(= y_j \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \right).$

（c）$\displaystyle x_{2j} y_{k2} + x_{3j} y_{k3} + x_{4j} y_{k4} = \sum_{i=2}^{4} x_{ij} y_{ki}.$

3.（a）$-5 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 2 & -5 \cdot (-3) \\ -5 \cdot 1 & -5 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -5 & 25 \end{bmatrix}.$

（b）$3 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 27 \end{bmatrix}.$

4.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 - 3 + 3 & 6 - 1 - 3 \\ -2 + 6 + 1 & 3 + 2 - 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{BA} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & -1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 + 3 & 2 + 6 & 6 - 3 \\ 6 + 1 & -3 + 2 & -9 - 1 \\ -2 + 1 & 1 + 2 & 3 - 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 7 & -1 & -10 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5.（a）$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - (-1) \cdot 5 = 9 + 5 = 14.$

（b）$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) - 6 \cdot (-1) = -36 + 6 = -30.$

（c）$\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - (-8) \cdot (-6) = -10 - 48 = -58.$

（d）第 3 行に沿ってラプラス展開すると，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\
&= -3 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 - 2[2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3] + 2 \cdot 7 - 3 \cdot (-3) \\
&= 3 - 21 - 2(-2 - 9) + 14 + 9 \\
&= 27
\end{aligned}$$

となる．

6.（a）$\boldsymbol{A}$ の各要素の余因子は，以下の通りである．

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5, \\
A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -(12 - 2) = -10, \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -4 - 1 = -5, \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -[-1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2] = -(-3 + 2) = 1, \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 9 - 2 = 7, \\
A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)] = -(-3 + 1) = 2, \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2 - 2 = -4, \\
A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 4 \cdot 2) = -(6 - 8) = 2, \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 3 + 4 = 7.
\end{aligned}$$

（b）(a) で求めた余因子を用い，第 2 列に沿ってラプラス展開すると，

$$|\boldsymbol{A}| = -1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{32} = -1 \cdot (-10) + 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 2 = 10 + 7 - 2 = 15.$$

となる．

（c）(a) と (b) より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -10 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{15}\cdot 5 & \frac{1}{15}\cdot 1 & \frac{1}{15}\cdot(-4) \\ \frac{1}{15}\cdot(-10) & \frac{1}{15}\cdot 7 & \frac{1}{15}\cdot 2 \\ \frac{1}{15}\cdot(-5) & \frac{1}{15}\cdot 2 & \frac{1}{15}\cdot 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/15 & -4/15 \\ -2/3 & 7/15 & 2/15 \\ -1/3 & 2/15 & 7/15 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

である．