# 数学補習プログラム（社会人院生向け）
# 練習問題【4 日目】

北村友宏 *

2016 年 3 月 26 日

講義資料や参考書などを参照しても構いません．

1. 次の 2 次関数の極値を求め，それが「極大値かつ最大値」か「極小値かつ最小値」かを判断しなさい．
   （a）$y = f(x) = x^2 + 4x + 3$
   （b）$y = f(x) = -2x^2 + 8x + 1$
   （c）$y = f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 6x - 5$
2. 次の関数が厳密な凹関数か，厳密な凸関数かをヘッセ行列式を用いて判断しなさい．
   （a）$z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - \dfrac{1}{2}x_2^2$
   （b）$z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_2^2$
3. ある独占企業は 1 種類の財を生産している．その財の需要関数は

   $$q = 20 - p$$

   で与えられ，逆需要関数は

   $$p = 20 - q$$

   となる．ただし，$q$ は財の需要量，$p$ は財の価格である．また，この独占企業の費用関数は

   $$c = 2q^2 + 2q + 2$$

   で与えられる．ただし，$c$ は独占企業の費用である．このとき，独占企業の利潤を最大化するための財の生産量と，その生産量のもとでの価格および利潤を求めなさい．また，その生産量において利潤が最大となることを確認しなさい．
4. ある完全競争企業は資本と労働を用いて財を生産しており，生産関数は

   $$y = 3K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

   で与えられる．ただし，$y$ は財の生産量，$K$ は資本量，$L$ は労働量である．また，この財の価格は 2，資本価格は 10，労働価格は 8 である．このとき，企業の利潤を最大化するための 1 階条件を求めなさい．また，その 1 階条件を満たす資本量と労働量において利潤が最大となることを確認しなさい．ただし，$K > 0$，$L > 0$ とする．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題【4日目】解答

1.（a）1次導関数は，

$$f'(x) = 2x^{2-1} + 4 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 2x + 4x^0 = 2x + 4$$

である．1階条件は，

$$2x + 4 = 0 \Longleftrightarrow 2x = -4 \Longleftrightarrow x = -2$$

となる．このときの $f(x)$ の値 $f(-2)$ は，

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

となる．

また，2次導関数は，

$$f''(x) = [2x + 4]' = 2 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 2x^0 = 2$$

となる．よって，任意の $x$ について $f''(x) > 0$ なので，$f(x)$ は $x = -2$ において最小値をとる．

したがって，$f(x)$ の極値は $-1$ で，極小値かつ最小値である．

（b）1次導関数は，

$$f'(x) = -2 \cdot 2x^{2-1} + 8 \cdot 1x^{1-1} + 0 = -4x + 8x^0 = -4x + 8$$

である．1階条件は，

$$-4x + 8 = 0 \Longleftrightarrow 8 = 4x \Longleftrightarrow x = 2$$

となる．このときの $f(x)$ の値 $f(2)$ は，

$$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 = -2 \cdot 4 + 16 + 1 = -8 + 16 + 1 = 9$$

となる．

また，2次導関数は，

$$f''(x) = [-4x + 8]' = -4 \cdot 1x^{1-1} + 0 = -4x^0 = -4$$

となる．よって，任意の $x$ について $f''(x) < 0$ なので，$f(x)$ は $x = 2$ において最大値をとる．

したがって，$f(x)$ の極値は 9 で，極大値かつ最大値である．

（c）1次導関数は，

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} + 6 \cdot 1x^{1-1} - 0 = -x + 6x^0 = -x + 6$$

である．1階条件は，

$$-x + 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 6$$

となる．このときの $f(x)$ の値 $f(6)$ は，

$$f(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -\frac{1}{2} \cdot 36 + 36 - 5 = -18 + 36 - 5 = 13$$

となる．

また，2次導関数は，

$$f''(x) = [-x + 6]' = -1 \cdot 1x^{1-1} + 0 = -x^0 = -1$$

となる．よって，任意の $x$ について $f''(x) < 0$ なので，$f(x)$ は $x = 6$ において最大値をとる．

したがって，$f(x)$ の極値は 13 で，極大値かつ最大値である．

2.（a）1 次偏導関数は，

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = -1 \cdot 2x_1^{2-1} - 0 = -2x_1,$$
$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2x_2^{2-1} = -x_2$$

である．よって，2 次偏導関数は，

$$f_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = -2 \cdot 1x_1^{1-1} = -2x_1^0 = -2,$$
$$f_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = -1 \cdot 1x_2^{1-1} = -x_2^0 = -1$$

となる．また，交差偏導関数は，

$$f_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}[-x_2] = 0$$

である．したがって，ヘッセ行列式は，

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 2 - 0 = 2$$

となる．よって，$f_{11} = -2 < 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = 2 > 0$ であることから，$f(x_1, x_2)$ は厳密な凹関数である．

（b）1 次偏導関数は，

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = 4 \cdot 2x_1^{2-1} - 5 \cdot 1x_1^{1-1}x_2 + 0 = 8x_1 - 5x_1^0 x_2 = 8x_1 - 5x_2,$$
$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 - 5x_1 \cdot 1x_2^{1-1} + 4 \cdot 2x_2^{2-1} = -5x_1 x_2^0 + 8x_2 = -5x_1 + 8x_2$$

である．よって，2 次偏導関数は，

$$f_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 8 \cdot 1x_1^{1-1} - 0 = 8x_1^0 = 8,$$
$$f_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0 + 8 \cdot 1x_2^{1-1} = 8x_2^0 = 8$$

となる．また，交差偏導関数は，

$$f_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}[-5x_1 + 8x_2] = -5 \cdot 1x_1^{1-1} + 0 = -5x_1^0 = -5$$

である．したがって，ヘッセ行列式は，

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot 8 - (-5) \cdot (-5) = 64 - 25 = 39$$

となる．よって，$f_{11} = 8 > 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = 39 > 0$ であることから，$f(x_1, x_2)$ は厳密な凸関数である．

3. 企業の利潤を $\pi$ とすると，利潤関数は，

$$\pi = pq - c = (20 - q)q - (2q^2 + 2q + 2) = (20 - q)q - 2q^2 - 2q - 2$$

と書くことができる．利潤最大化問題は，

$$\max_{q} \ (20 - q)q - 2q^2 - 2q - 2$$

となる．利潤関数を $q$ で微分すると，

$$\begin{aligned}
\pi' &= [20 - q]'q + (20 - q)[q]' - \left[2q^2\right]' - [2q]' - [2]' \\
&= -1 \cdot 1q^{1-1} \cdot q + (20 - q) \cdot 1q^{1-1} - 2 \cdot 2q^{2-1} - 2 \cdot 1q^{1-1} - 0 \\
&= -q^0 \cdot q + (20 - q)q^0 - 4q - 2q^0 \\
&= -q + 20 - q - 4q - 2 \\
&= -6q + 18
\end{aligned}$$

となる．よって，1 階条件から利潤を最大にする生産量を求めると，

$$\pi' = 0 \Longleftrightarrow -6q + 18 = 0 \Longleftrightarrow 18 = 6q \Longleftrightarrow q = 3.$$

このときの価格は

$$p = 20 - 3 = 17$$

となり，利潤は

$$\pi = (20 - 3)3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 17 \cdot 3 - 2 \cdot 9 - 6 - 2 = 51 - 18 - 6 - 2 = 25$$

である．

したがって，利潤を最大にする生産量を $q^*$，そのもとでの価格と利潤をそれぞれ $p^*, \pi^*$ とすると，

$$q^* = 3, p^* = 17, \pi^* = 25.$$

また，利潤関数の 2 次導関数は

$$\pi'' = [-6q + 18]' = -6 \cdot 1q^{1-1} + 0 = -6q^0 = -6 < 0$$

となり，任意の $q$ について $\pi'' < 0$ である．したがって，$\pi' = 0$ を満たす $q$，つまり $q^* = 3$ において利潤が最大となっている．

4. 企業の利潤を $\pi$ とすると，利潤関数は，

$$\pi = 2y - (10K + 8L) = 2 \cdot 3K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - (10K + 8L) = 6K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - 10K - 8L$$

と書くことができる．利潤最大化問題は，

$$\max_{K,L} \ 6K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - 10K - 8L$$

となる．利潤関数を $K$ と $L$ で偏微分すると，

$$\begin{aligned}
\pi_K &= 6 \cdot \frac{1}{3}K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{1}{3}} - 10 = 2K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} - 10, \\
\pi_L &= 6K^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}L^{\frac{1}{3}-1} - 8 = 2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} - 8
\end{aligned}$$

となる．よって，1 階条件は，

$$\pi_K = 0 \Longleftrightarrow 2K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} - 10 = 0 \Longleftrightarrow 2K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} = 10 \Longleftrightarrow K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} = 5,$$
$$\pi_L = 0 \Longleftrightarrow 2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} - 8 = 0 \Longleftrightarrow 2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 8 \Longleftrightarrow K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 4$$

である．

また，利潤関数の 2 次偏導関数は

$$\pi_{KK} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) K^{-\frac{2}{3}-1}L^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{1}{3}},$$
$$\pi_{LL} = 2K^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) L^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{4}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}}$$

であり，交差偏導関数は，

$$\pi_{KL} = 2 \cdot \frac{1}{3}K^{\frac{1}{3}-1}L^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

となる．よって，ヘッセ行列式は，

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}| &= \begin{vmatrix} \pi_{KK} & \pi_{KL} \\ \pi_{KL} & \pi_{LL} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\frac{4}{3}K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{1}{3}} & \frac{2}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} & -\frac{4}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{4}{3}K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{4}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}}\right) - \frac{2}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{16}{9}K^{-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}-\frac{5}{3}} - \frac{4}{9}K^{-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{16}{9}K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{9}K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{12}{9}K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{4}{3}K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

となる．問題文より，$K > 0,\ L > 0$ なので，任意の $K > 0$ と $L > 0$ について $\pi_{KK} < 0$ かつ $\begin{vmatrix} \pi_{KK} & \pi_{KL} \\ \pi_{KL} & \pi_{LL} \end{vmatrix} > 0$ であることから，利潤関数は厳密な凹関数である．したがって，1 階条件を満たす $K$ と $L$ において利潤 $\pi$ が最大となる．