数学補習プログラム（社会人院生向け）
練習問題【5 日目】

北村友宏 *

2016 年 3 月 27 日

講義資料や参考書などを参照しても構いません．

1. 消費者のコブ・ダグラス型効用関数は，

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

のように与えられる．ここで，x_1 は第 1 財の消費量，x_2 は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 2, 第 2 財の価格が 3, 所得が 18 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量を，ラグランジュ未定乗数法を用いて 求めなさい（効用の導出，極大や最大であることの確認は不要）．

2. 消費者のコブ・ダグラス型効用関数は，

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2^{\frac{1}{2}}$$

のように与えられる．ここで，x_1 は第 1 財の消費量，x_2 は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 4, 第 2 財の価格が 3, 所得が 36 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量を，ラグランジュ未定乗数法を用いて 求めなさい（効用の導出，極大や最大であることの確認は不要）．

3. 消費者のコブ・ダグラス型効用関数は，

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

のように与えられる．ここで，x_1 は第 1 財の消費量，x_2 は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 4, 第 2 財の価格が 4，所得が 8 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量およびその消費量のもとでの効用を，ラグランジュ未定乗数法を用いて 求めなさい．また，その消費量のもとで効用が極大となっていることを確認しなさい．

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題【5 日目】解答

1. 効用最大化問題を，

$$\max_{x_1,x_2} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}},$$
$$\text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 = 18$$

と定式化する．ラグランジュ関数を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \lambda(18 - 2x_1 - 3x_2)$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を x_1, x_2, λ に関して最適化する．ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を x_1, x_2, λ の各変数で偏微分すると，

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{3}-1} x_2^{\frac{2}{3}} + \lambda \cdot (-2) = \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - 2\lambda, \\
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} x_2^{\frac{2}{3}-1} + \lambda \cdot (-3) = \frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} - 3\lambda, \\
L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 18 - 2x_1 - 3x_2.
\end{aligned}$$

よって，1 階条件は，

$$L_1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} = 2\lambda, \tag{1}$$
$$L_2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} - 3\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} = 3\lambda, \tag{2}$$
$$L_\lambda = 0 \Longleftrightarrow 18 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \Longleftrightarrow 18 = 2x_1 + 3x_2. \tag{3}$$

これら (1),(2),(3) からなる連立方程式を解く．変数は x_1, x_2, λ の 3 つであるが，最適な x_1 と x_2 を求めたいので，まずは (1) と (2) から λ を消去する．(1) の両辺を (2) の右辺 3λ で割ると，

$$\frac{\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}}{3\lambda} = \frac{2\lambda}{3\lambda}.$$

上式の左辺の分母に (2) の左辺を代入すると，(1) を (2) で割った形が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2\lambda}{3\lambda} &\Longleftrightarrow \frac{x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}}{2 x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_1^{-\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} \cdot x_2^{-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} x_1^{-1} x_2 = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} x_2 = \frac{2}{3} x_1 \\
&\Longleftrightarrow x_2 = \frac{4}{3} x_1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

(4) を (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}18 &= 2x_1 + 3 \cdot \frac{4}{3}x_1 \\ &= 2x_1 + 4x_1 \\ &= 6x_1 \\ \Longleftrightarrow x_1 &= 3.\end{aligned}$$

これを (4) に代入すると，

$$x_2 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ x_1^*, x_2^* とすると，

$$x_1^* = 3, x_2^* = 4$$

である．

2. 効用最大化問題を，

$$\max_{x_1, x_2} x_1 x_2^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 = 36$$

と定式化する．ラグランジュ関数を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(36 - 4x_1 - 3x_2)$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を x_1, x_2, λ に関して最適化する．ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を x_1, x_2, λ の各変数で偏微分すると，

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda \cdot (-4) = x_2^{\frac{1}{2}} - 4\lambda, \\ L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 \cdot \frac{1}{2}x_2^{\frac{1}{2}-1} + \lambda \cdot (-3) = \frac{1}{2}x_1 x_2^{-\frac{1}{2}} - 3\lambda, \\ L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 36 - 4x_1 - 3x_2.\end{aligned}$$

よって，1 階条件は，

$$L_1 = 0 \Longleftrightarrow x_2^{\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = 4\lambda, \tag{1}$$
$$L_2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1 x_2^{-\frac{1}{2}} - 3\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1 x_2^{-\frac{1}{2}} = 3\lambda, \tag{2}$$
$$L_\lambda = 0 \Longleftrightarrow 36 - 4x_1 - 3x_2 = 0 \Longleftrightarrow 36 = 4x_1 + 3x_2. \tag{3}$$

これら (1),(2),(3) からなる連立方程式を解く．変数は x_1, x_2, λ の 3 つであるが，最適な x_1 と x_2 を求めたいので，まずは (1) と (2) から λ を消去する．(1) の両辺を (2) の右辺 3λ で割ると，

$$\frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{3\lambda} = \frac{4\lambda}{3\lambda}.$$

上式の左辺の分母に (2) の左辺を代入すると，(1) を (2) で割った形が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4\lambda}{3\lambda} &\iff \frac{2\cdot x_2^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}x_1x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3} \\
&\iff 2\cdot x_1^{-1}\cdot x_2^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \\
&\iff 2x_1^{-1}x_2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \\
&\iff 2x_1^{-1}x_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \\
&\iff 2x_1^{-1}x_2 = \frac{4}{3} \\
&\iff 2\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{3} \\
&\iff 2x_2 = \frac{4}{3}x_1 \\
&\iff x_2 = \frac{4}{6}x_1 \\
&\iff x_2 = \frac{2}{3}x_1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

(4) を (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
36 &= 4x_1 + 3\cdot\frac{2}{3}x_1 \\
&= 4x_1 + 2x_1 \\
&= 6x_1 \\
\iff x_1 &= 6.
\end{aligned}$$

これを (4) に代入すると，

$$x_2 = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ x_1^*, x_2^* とすると，

$$x_1^* = 6, x_2^* = 4$$

である．

3. 効用最大化問題を，

$$\begin{aligned}
&\max_{x_1, x_2} x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}, \\
&\text{s.t. } 4x_1 + 4x_2 = 8
\end{aligned}$$

と定式化する．ラグランジュ関数を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(8 - 4x_1 - 4x_2)$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を x_1, x_2, λ に関して最適化する．ラグランジュ

関数 $L(x_1,x_2,\lambda)$ を x_1,x_2,λ の各変数で偏微分すると，

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}-1}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda\cdot(-4) = \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - 4\lambda,\\
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}x_2^{\frac{1}{2}-1} + \lambda\cdot(-4) = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - 4\lambda,\\
L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 8 - 4x_1 - 4x_2.
\end{aligned}$$

よって，1 階条件は，

$$\begin{aligned}
L_1 = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 4\lambda, && (1)\\
L_2 = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} = 4\lambda, && (2)\\
L_\lambda = 0 &\Longleftrightarrow 8 - 4x_1 - 4x_2 = 0 \Longleftrightarrow 8 = 4x_1 + 4x_2. && (3)
\end{aligned}$$

これら (1),(2),(3) からなる連立方程式を解く．変数は x_1,x_2,λ の 3 つであるが，最適な x_1 と x_2 を求めたいので，まずは (1) と (2) から λ を消去する．(1) の両辺を (2) の右辺 4λ で割ると，

$$\frac{\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{4\lambda} = \frac{4\lambda}{4\lambda}.$$

上式の左辺の分母に (2) の左辺を代入すると，(1) を (2) で割った形が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4\lambda}{4\lambda} &\Longleftrightarrow \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = 1\\
&\Longleftrightarrow x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1\\
&\Longleftrightarrow x_1^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1\\
&\Longleftrightarrow x_1^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1\\
&\Longleftrightarrow x_1^{-1}x_2 = 1\\
&\Longleftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 1\\
&\Longleftrightarrow x_2 = x_1. && (4)
\end{aligned}$$

(4) を (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
8 &= 4x_1 + 4\cdot x_1\\
&= 8x_1\\
\Longleftrightarrow x_1 &= 1.
\end{aligned}$$

これを (4) に代入すると，

$$x_2 = 1.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ x_1^*,x_2^* とすると，

$$x_1^* = x_2^* = 1$$

であり，そのときの効用を u^* とすると，

$$u^* = 1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ の x_1, x_2, λ に関する 2 次導関数は，

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_1^{-\frac{1}{2}-1} x_2^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}, \\ L_{22} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_2^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{3}{2}}, \\ L_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

であり，交差偏導関数は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}, \\ L_{1\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -4, \\ L_{2\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -4. \end{aligned}$$

よって，$x_1^* = x_2^* = 1$ のときの縁付きヘッセ行列式は，

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -\frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} \\ -4 & \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -4 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}.$$

第 2 列の 1 倍を第 3 列に足す（第 3 列を変換する）と，

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -4 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \overset{c_3+c_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4-4 \\ -4 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \\ -4 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ -4 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -4 & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}.$$

これを第 3 列に沿ってラプラス展開すると，

$$\begin{aligned} |\bar{\boldsymbol{H}}| &= -8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & -\frac{1}{4} \\ -4 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} + 0 + 0 \\ &= -8 \begin{vmatrix} -4 & -\frac{1}{4} \\ -4 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \\ &= -8 \left\{ -4 \cdot \frac{1}{4} - (-4) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} \\ &= -8 \cdot (-1-1) \\ &= -8 \cdot (-2) \\ &= 16 > 0. \end{aligned}$$

よって，$x_1^* = x_2^* = 1$ において $|\bar{\boldsymbol{H}}| > 0$ となるので，このとき効用が**極大**になっている．