数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 1：1 変数関数とその 1 階微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 13 日

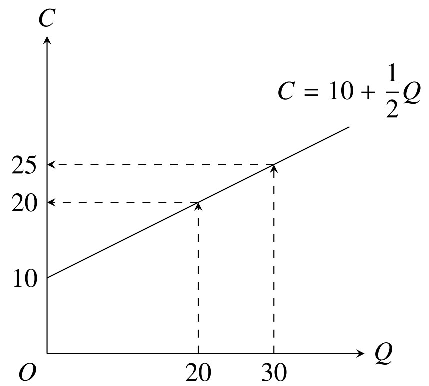
1　1 変数関数（参考書上巻 pp.21-34）

1.1　関数

- ある変数の各値に対してただ 1 つの値に決まる（別の）変数を**関数**という．
  e.g, ある財を製造している企業の「総費用」と「財の産出量」の関係が，

$$C = 10 + \frac{1}{2}Q$$

  という数式で表されているとする．ただし，C は総費用，Q は産出量．図で表すと，



  ⋆ Q の各値に対して C の値が，$C = 10 + \frac{1}{2}Q$ というルールでただ 1 つに（一意に）決まる．
  例えば $Q = 20$ のとき $C = 10 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 20$ であり，$Q = 30$ のとき $C = 10 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 25$.
  ⇒ このとき，「C は Q の関数」と表現する．
  ⇒ Q が C を説明している．費用を説明する関数を，経済学では**費用関数**という．
  ⋆ 説明する側の変数を**説明変数**または**独立変数**という（この例では Q)．
  ⋆ 説明される側の変数を**被説明変数**または**従属変数**という（この例では C)．
  ⋆ 説明変数が 1 つである関数を **1 変数関数**という．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

* $C = 10 + \frac{1}{2}Q$ は説明変数が Q の 1 つだけなので，1 変数関数.

★ 関数形（C の決定ルール）を特定化せず，一般化して

$$C = f(Q)$$

と書くこともできる．右辺の $f(Q)$ は Q の関数という意味．$f \times Q$ ではない.

★ $f(Q) = 10 + \frac{1}{2}Q$ と書いてもよい.

- 「総費用と産出量」以外の，2 変数間の関係も 1 変数関数を用いて表すことができる．一般的には，x を説明変数，y を被説明変数として，

$$y = f(x)$$

と書くことが多い.

1.2 ベキ関数

- 定数の指数をもつ関数を**ベキ関数**といい，

$$y = x^n$$

の形で表される（n が「定数の指数」）.

指数の法則

- 法則 I：$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
- 法則 II：$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$. ただし，$x \neq 0$.
- 法則 III：$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. ただし，$x \neq 0$.
- 法則 IV：$x^0 = 1$. ただし，$x \neq 0$.
- 法則 V：$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
- 法則 VI：$(x^m)^n = x^{mn}$.

※法則 I と法則 VI の違いに注意！法則 I の左辺は「x^m と x^n を掛けたもの」であるが，法則 VI の左辺は「x^m を n 乗したもの」.

例題 1.2.1 指数の法則を用いて，$x^2 \cdot x^3$ を x^n の形に書き換えなさい.

解法

- $x^m \cdot x^n$ の形なので，法則 I を用いる.
- 2 が m に，3 が n に相当する.

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5.$$

例題 1.2.2 指数の法則を用いて，$\dfrac{x^5}{x^3}$ を x^n の形に書き換えなさい.

解法

- $\dfrac{x^m}{x^n}$ の形なので，法則 II を用いる．
- 5 が m に，3 が n に相当する．

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2.$$

例題 1.2.3 指数の法則を用いて，$\dfrac{x^3}{x^5}$ を $\dfrac{1}{x^n}$ の形に書き換えなさい．

解法

- $\dfrac{x^m}{x^n}$ の形なので，まずは法則 II を用いて x^{m-n} の形にする．続いて，$m-n$ が負となることから，法則 III を用いる．
- 3 が m に，5 が n に相当する．

$$\underbrace{\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5}}_{\text{法則 II より}} = \underbrace{x^{-2} = \frac{1}{x^2}}_{\text{法則 III より}}.$$

例題 1.2.4 指数の法則を用いて，$\dfrac{x^2}{x^2}$ を求めなさい．

解法

- $\dfrac{x^m}{x^n}$ の形なので，まずは法則 II を用いて x^{m-n} の形にする．続いて，$m-n$ が 0 となることから，法則 IV を用いる．
- 2 が m と n 両方に相当する．

$$\underbrace{\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2}}_{\text{法則 II より}} = \underbrace{x^0 = 1}_{\text{法則 IV より}}.$$

例題 1.2.5 指数の法則を用いて，$(x^2)^3$ を x^n の形に書き換えなさい．

解法

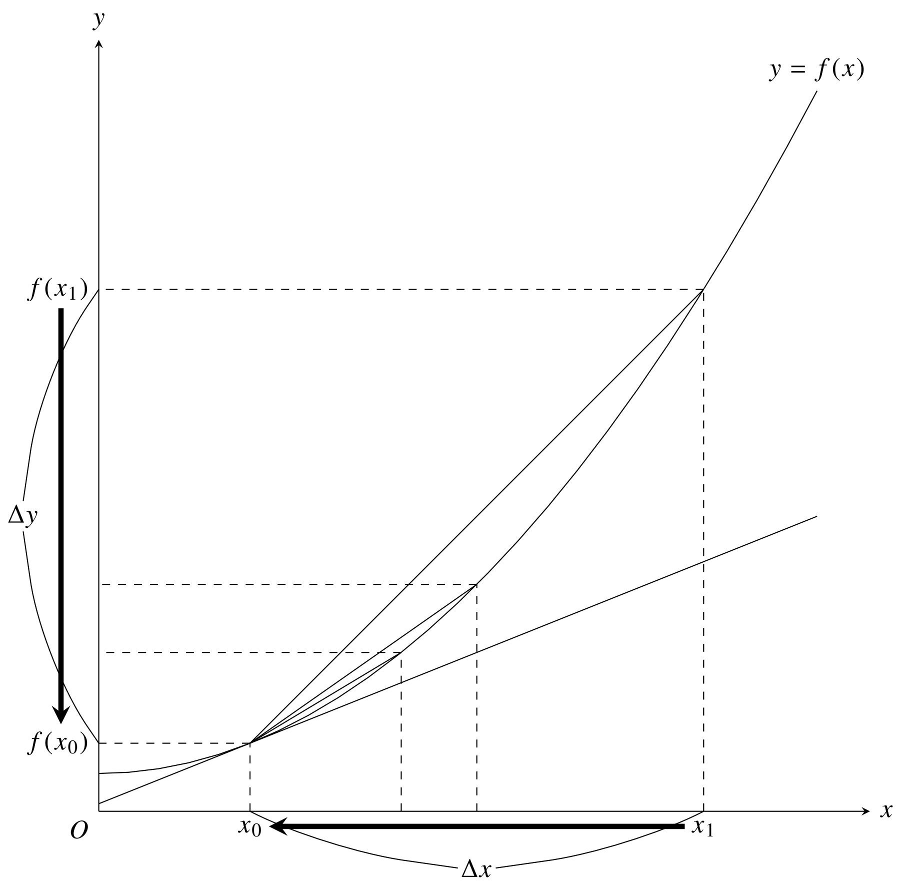
- $(x^m)^n$ の形なので，法則 VI を用いる．
- 2 が m に，3 が n に相当する．

$$(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6.$$

2　1 変数関数の 1 階微分（参考書上巻 pp.171-177, 205-228）

2.1　微分の概念

- 関数を微分すると，その関数の接線の傾きを求めることができる（「微分」の定義は後述）.
- 接線の傾きの求め方を図で表すと，以下のようになる.



- 1 変数関数 $y = f(x)$ の説明変数 x の値を，x_0 から x_1 に変化させる（e.g., x を 3 から 3.1 に増加させるなど）．このとき，x の変化量を Δx とする．すなわち，

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Longleftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

である（e.g., x を 3 から 3.1 に増加させる場合，$\Delta x = 3.1 - 3 = 0.1$）.

- x の値を，x_0 から x_1 に変化させると，y が x の関数であることから，被説明変数 y の値も変化する．y は $f(x_0)$ から $f(x_1)$ に変化する．y の変化量を Δy とする．すなわち，

$$\Delta y = f(\underbrace{x_1}_{=x_0+\Delta x}) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

★ $f(x_0)$ は $x = x_0$ のときの $f(x)$ の値，$f(x_1)$ は $x = x_1$ のときの $f(x)$ の値.

- 被説明変数の変化量と説明変数の変化量の商を**平均変化率**という．x の値を x_0 から x_1 に変化させたときの平均変化率は，
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$
- x_1 を x_0 に限りなく近づけると，平均変化率は 1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフを平面上に描いたときの接線の傾きに近くなる．
- 「x_1 を x_0 に近づける」を「Δx を 0 に近づける」としても意味は同じ．Δx が 0 に近づくことを，
$$\Delta x \to 0$$
と表現する．
※**「$\Delta x = 0$」とするのではない**（Δx をちょうど 0 にするのではない）．
- Δx が 0 に近づくとき，平均変化率は，**極限**
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
に近づく．
- $\Delta x \to 0$ のときの平均変化率の極限を**導関数**といい，
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
と書く．
  - ⋆ Δ は「差」，d は「微小な変化」という意味．
    ⇒ dx は x が微小に変化したときの x の変化量，dy は y が微小に変化したときの y の変化量．
- 導関数を求めるプロセスを**微分**という．
  - ⋆ $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることを，「y を x に関して微分する」や「y を x について微分する」と表現する．
- 関数を 1 回のみ微分することを **1 階微分**といい，それによって求められた導関数を **1 次導関数**または **1 階の導関数**という．
- x_0 の添え字を外すと，導関数は，
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
のように，やや簡潔に書くことができる．
  - ⋆ 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は元の関数 $f(x)$ の接線の傾きとなり，x の微小な変化に対する y の変化率を表す．<u>この点に関する詳細は，本プログラムの終盤で説明する．</u>
  - ⋆ $\dfrac{dy}{dx}$ 以外にも，次のような書き方がある．
$$\frac{d}{dx}y,\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{df}{dx}(x),\ \frac{d}{dx}f(x),\ f'(x),\ y'.$$
    $\dfrac{d}{dx}$ は，「x について（ある関数の）導関数を求める」や「（ある関数を）x で微分する」という意味の記号であると考えることができる．

2.2　ベキ関数の 1 階微分

ベキ関数 $y = f(x) = x^n$ の 1 次導関数は，

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

例題 2.2.1　$y = x^{\frac{1}{2}}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $\frac{1}{2}$ が n に相当．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

例題 2.2.2　$y = 3x^{\frac{1}{2}}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- ベキ関数に定数（この例題では 3）が掛かっている場合，掛かっている定数はそのままにして，x^n の形になっている部分を微分する．

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

例題 2.2.3　$y = 5$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- すでに見たように，$x^0 = 1$ なので，$y = 5x^0$ と考える．すると，定数の掛かったベキ関数の形になる．
- 0 が n に相当．

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \underbrace{0 \cdot x^{0-1}}_{x^0\text{の 1 次導関数}} = 0.$$

- この結果からわかること：定数関数の 1 次導関数は 0.

2.3　同じ説明変数をもつ 2 つの関数の和・差・積・商の微分

2 つの関数を $f(x)$ と $g(x)$ とする．ただし，$f(x)$ と $g(x)$ はベキ関数でなくてもよい．

- 2 つの関数の和の 1 次導関数：$\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = [f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$.
- 2 つの関数の差の 1 次導関数：$\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = [f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$.
- 2 つの関数の積の 1 次導関数：$\dfrac{d}{dx}f(x)g(x) = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- 2 つの関数の商の 1 次導関数：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

例題 2.3.1 $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ と考えれば，$y = f(x)+g(x)$，つまり 2 つの関数の和の形となる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right] = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' + \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

例題 2.3.2 $y = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ と考えれば，$y = f(x)-g(x)$，つまり 2 つの関数の差の形となる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right] = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' - \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

例題 2.3.3 $y = x(10-x)$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $f(x) = x, g(x) = 10 - x$ と考えれば，$y = f(x)g(x)$，つまり 2 つの関数の積の形となる．
- $g(x)$ は 10 という定数項を含むので，この部分を微分するときは，定数関数の 1 次導関数が 0 であることを利用する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[x(10-x)\right] \\
&= [x]'(10-x) + x\,[10-x]' \\
&= 1x^{1-1}(10-x) + x(0-1x^{1-1}) \\
&= \underbrace{x^0}_{=1}(10-x) + x(-\underbrace{x^0}_{=1}) \\
&= 10 - x + x\cdot(-1) \\
&= 10 - x - x \\
&= 10 - 2x.
\end{aligned}
$$

例題 2.3.4 $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $f(x) = 3x, g(x) = x^2 + 2$ と考えれば，$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，つまり 2 つの関数の商の形となる．
- $g(x)$ は 2 という定数項を含むので，この部分を微分するときは，定数関数の 1 次導関数が 0 であることを利用する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{3x}{x^2+2} \\
&= \frac{[3x]'\,(x^2+2) - 3x\left[x^2+2\right]'}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{3\cdot 1x^{1-1}(x^2+2) - 3x(2x^{2-1}+0)}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{3\overbrace{x^0}^{=1}(x^2+2) - 3x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{3\cdot x^2 + 3\cdot 2 - 6x^{1+1}}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{3x^2 + 6 - 6x^2}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}.
\end{aligned}
$$

2.4 合成関数の微分（チェーン・ルール）

- y の関数 $y = f(u)$ を考える．また，u は x の関数であるとする．つまり，$u = g(x)$ とする．y を x で微分したい．
  $\Rightarrow u = g(x)$ なので，$y = f[g(x)]$ と書くことができる．
  $\Rightarrow y$ の説明変数 u の部分に別の関数 $u = g(x)$ が入っている．
- 説明変数の部分に別の関数が代入された関数を**合成関数**という．

★ e.g., $y = (2x)^2$ は合成関数．

$\because$ $u = 2x$ とすると，$y = u^2$ というベキ関数の**説明変数** u **の部分に**別の関数 $u = 2x$ が代入されているから．

合成関数の微分（チェーン・ルール）：$y = f(u)$ と $u = g(x)$ について，$y = f[g(x)]$ とすると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

例題 2.4.1 $y = 2(4x^2 + 3x)^3$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $u = 4x^2 + 3x$ とすると，$y = 2u^3$ となり，説明変数 u の部分に別の関数が代入された合成関数の形となる．

  $\Rightarrow$ 合成関数の微分を適用する．
- 合成関数の微分の適用後，u は必ず元の形 $4x^2 + 3x$ に戻す．

$u = 4x^2 + 3x$ とすると，$y = 2u^3$ となる．

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \underbrace{\frac{d}{du}\left[2u^3\right]}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left[4x^2 + 3x\right]}_{\frac{du}{dx}} \\
&= 2 \cdot 3u^{3-1} \cdot (4 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 1x^{1-1}) \\
&= 6u^2(8x + 3\underbrace{x^0}_{=1}) \\
&= 6\underbrace{u}_{=4x^2+3x}{}^2(8x + 3) \\
&= 6(4x^2 + 3x)^2(8x + 3).
\end{aligned}$$

- $u = 4x^2 + 3x$ とせずに，以下のように書いてもよい．

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3(4x^2 + 3x)^2 \cdot (4 \cdot 2x + 3) = 6(4x^2 + 3x)^2(8x + 3).$$