数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 3：指数関数・対数関数

北村友宏 *

2016 年 3 月 13 日

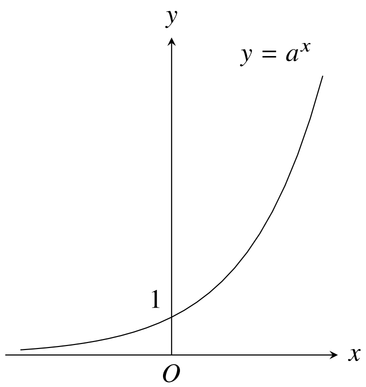
1　指数関数（参考書上巻 pp.353-370）

1.1　指数関数の性質

- $\underline{a > 1}$ とする．説明変数が指数となっている関数を**指数関数**といい，

$$y = a^x$$

の形で表される．グラフで表すと，



★ 指数関数において，定数 a を指数 x の**底**（てい）という．

★ $a > 1$ のとき，厳密な増加関数．すなわち，任意の x_1 と x_2 について，

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

（説明変数の値が大きくなると，関数の値も大きくなる．）

★ **被説明変数**は必ず正．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

ベキ関数と指数関数の違い

- **ベキ関数** $y = x^n$：定数の指数をもつ関数．「説明変数の定数乗」の形．
- **指数関数** $y = a^x$：説明変数が指数となっている関数．「定数の説明変数乗」の形．

$\Rightarrow$ 説明変数がどこにあるかで，どちらのタイプなのかを判断．

1.2 ネイピア数

- 「微分しても関数形が変わらない指数関数」の底，つまり

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

となる e を**ネイピア数**という．
  - ⋆ $e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ と定義する場合もある．
  - ⋆ 数値で表すと，$e = 2.71828\cdots$ なので，明らかに 1 より大きい．
- ネイピア数を底とする指数関数 $y = e^x$ を**自然指数関数**という．
  - ⋆ $y = e^x$ を，$y = \exp(x)$ と書くこともある．

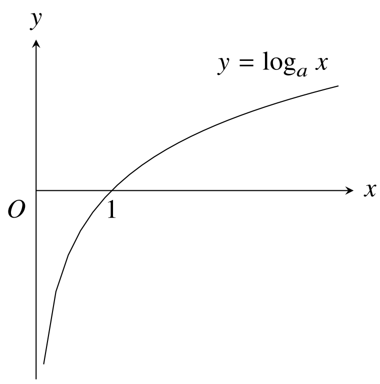
2 対数関数（参考書上巻 pp.370-382）

2.1 対数関数の性質

- $\underline{a > 1}$ とする．

$$y = \log_a x$$

の形で表される関数を**対数関数**という．グラフで表すと，



  - ⋆ 対数関数において，定数 a を対数の**底**（てい）という．
  - ⋆「$y = \log_a x \Longleftrightarrow a^y = x$」が成り立つ．
    - ∗ e.g., $a = 2$ のとき，$2^3 = 8$ なので，$\log_2 8 = 3$. また，$2^4 = 16$ なので，$\log_2 16 = 4$.
  - ⋆ $a > 1$ のとき，厳密な増加関数．すなわち，任意の $x_1 > 0$ と $x_2 > 0$ について，

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

（説明変数の値が大きくなると，関数の値も大きくなる.）

- ★ **説明変数**は必ず正.

- ネイピア数を底とする対数関数 $y = \log_e x$ を**自然対数関数**という.
  - ★ 通常，底の e を省略して $y = \log x$ と書くか，または $y = \ln x$ と書く.
  - ★「$y = \ln x \iff e^y = x$」が成り立つ.
  - ★ $\ln e = \log_e e = 1$ が成り立つ.
    $\because e^1 = e$.

対数に関する法則

$u > 0, v > 0$ とする.

- 法則 I（積の対数）：$\ln uv = \ln u + \ln v$.
- 法則 II（商の対数）：$\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$.
- 法則 III（累乗の対数）：$\ln u^b = b \ln u$.

※これらの法則は自然対数でない対数についても（ln を $\log_a$ に変えても）成り立つ.