数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 4：指数関数と対数関数の微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 13 日

1　指数関数と対数関数の微分（参考書上巻 pp.382-390）

- 指数関数の 1 次導関数：$\frac{d}{dx}a^x = [a^x]' = a^x \ln a$.
  - ⋆ ベキ関数の 1 次導関数 $[x^n]' = nx^{n-1}$ とは異なることに注意！
- 自然指数関数の 1 次導関数：$\frac{d}{dx}e^x = [e^x]' = e^x$.
- 自然対数関数の 1 次導関数：$\frac{d}{dx}\ln x = [\ln x]' = \frac{1}{x}$.

例題 1.1　$y = 2^x$ の 1 次導関数と 2 次導関数を求めなさい．

解法

- 2 が a に相当．
- 2 次導関数は，1 次導関数をさらに x で微分すれば求めることができる．1 次導関数は「指数関数に定数が掛かっている形」となるが，これを微分するときは，掛かっている定数はそのままにして，指数関数になっている部分を微分する（ベキ関数に定数が掛かっている場合と同様）.

1 次導関数は，

$$\frac{dy}{dx} = 2^x \underbrace{\ln 2}_{\text{定数}}.$$

2 次導関数は，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{(\ln 2)}_{\text{定数}} \cdot \underbrace{2^x \ln 2}_{2^x\text{の微分}} = 2^x(\ln 2)^2.$$

例題 1.2　$y = -e^{-7x}$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

- $u = -7x$ とすると，$y = -e^u$ となり，説明変数 u の部分に別の関数が代入された合成関数の形となる．
  $\Rightarrow$ 合成関数の微分を適用する．
- e^u の前にマイナスがついているが，これは「指数関数に -1 という定数が掛かっている」と考えればよい．
- 合成関数の微分の適用後，u は必ず元の形 $-7x$ に戻す．

$u = -7x$ とすると，$y = -e^u$ となる．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\\ &= \underbrace{\frac{d}{du}\left[-e^u\right]}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left[-7x\right]}_{\frac{du}{dx}}\\ &= (-1)\cdot e^u \cdot (-7\cdot 1x^{1-1})\\ &= -e^{\overbrace{u}^{=-7x}} \cdot (-7\underbrace{x^0}_{=1})\\ &= -e^{-7x}\cdot(-7\cdot 1)\\ &= 7e^{-7x}.\end{aligned}$$

例題 1.3 $y = \ln(x^2+2x)$ の 1 次導関数を求めなさい．

解法

- $u = x^2 + 2x$ とすると，$y = \ln u$ となり，説明変数 u の部分に別の関数が代入された合成関数の形となる．
  $\Rightarrow$ 合成関数の微分を適用する．
- 合成関数の微分の適用後，u は必ず元の形 $x^2 + 2x$ に戻す．

$u = x^2 + 2x$ とすると，$y = \ln u$ となる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \underbrace{\frac{d}{du}\ln u}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left[x^2+2x\right]}_{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{u}\cdot(2x^{2-1} + 2\cdot 1x^{1-1}) = \frac{1}{x^2+2x}\cdot(2x + 2\underbrace{x^0}_{=1}) = \frac{2x+2}{x^2+2x}.$$
