# 数学補習プログラム（社会人院生向け）<br>トピック 5：多変数関数とその 1 階偏微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

## 1　多変数関数（参考書上巻 pp.35-37）

- 説明変数が 2 つ以上の関数を**多変数関数**という．
  e.g, ある財を製造している企業の「財の生産量 $Y$」は「資本量 $K$」と「労働雇用量 $L$」の 2 つによって説明され，
  $$Y = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$
  という数式で表されているとする．
  - ⋆ 説明変数は $K$ と $L$ の 2 つ．被説明変数は $Y$.
  - ⋆ $K$ と $L$ の値の組み合わせそれぞれに対して $Y$ の値が，$Y = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ というルールでただ 1 つに（一意に）決まる．
    例えば「$K = 9$，$L = 4$」のとき $Y = 9^{\frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6$.
    $\Rightarrow Y$ は $K$ と $L$ の関数.
  - ⋆ 生産量や生産額を説明する関数を，経済学では**生産関数**という．
  - ⋆ 関数形（$Y$ の決定ルール）を特定化せず，一般化して
    $$Y = f(K, L)$$
    と書くこともできる．右辺の $f(K, L)$ は $K$ と $L$ の関数という意味.
  - ⋆ $f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ と書いてもよい.
- 「資本量，労働雇用量と生産量」以外の，2 変数と別の変数の間の関係も，多変数関数を用いて表すことができる．一般的には，$z = f(x, y)$ や $z = f(x_1, x_2)$ と書くことが多い.
- 説明変数が 3 個以上あってもよい．説明変数が $n$ 個の場合，一般的には，
  $$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
  と書くことが多い.

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

## 2　多変数関数の 1 階偏微分（参考書上巻 pp.228-234）

- e.g., 多変数関数
$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
を，特定の変数 $x_1$ に関して偏微分すると，「他の説明変数 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ の値を一定（変化しない）として，$x_1$ が微小に変化したとき，その関数の値 $z$ がどの程度変化するか」を求めることができる（「偏微分」の定義は後述）.
- 多変数関数
$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
において，$z$ の $x_1$ に関する**偏導関数**は，
$$\frac{\partial z}{\partial x_1}$$
と書く.
- 偏導関数を求めるプロセスを**偏微分**という.
  - ⋆ $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ を求めることを，「$z$ を $x_1$ に関して偏微分する」や「$z$ を $x_1$ について偏微分する」と表現する.
- $z$ を $x_1$ 以外の **1 つの**変数に関して偏微分することもできる．$x_2$ に関する偏導関数は $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$, $x_3$ に関する偏導関数は $\dfrac{\partial z}{\partial x_3}, \cdots$, $i$ 番目の変数 $x_i$ に関する偏導関数は $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}, \cdots$.
- 関数を 1 回のみ偏微分することを **1 階偏微分**といい，それによって求められた導関数を **1 次偏導関数**または **1 階の偏導関数**という.
  - ⋆ $z$ の $x_i$ に関する偏導関数は，$\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ 以外にも，次のような書き方がある.
$$\frac{\partial}{\partial x_i} z,\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i},\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$
    $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は，「$x_i$ について（ある関数の）偏導関数を求める」や「（ある関数を）$x_i$ で偏微分する」という意味の記号であると考えることができる.
    - ∗ $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の 1 次偏導関数は，$\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ を $f_1$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ を $f_2, \cdots$ と書くこともある.
    - ∗ $z = z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の 1 次偏導関数は，$\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ を $z_1$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ を $z_2, \cdots$ と書くこともある.
    - ∗ $z = f(x, y)$ の 1 次偏導関数は，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $f_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を $f_y$ と書くこともある.
    - ∗ $z = z(x, y)$ の 1 次偏導関数は，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $z_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を $z_y$ と書くこともある.

    ⇒ これらは「何番目の説明変数で偏微分するか」の数字，または「どの説明変数で偏微分するか」の変数名を関数の記号の添え字として書く表記法.

.........................................................................................................

**例題 2.1**　$z = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 3x_1x_2 + 4x_2^{\frac{1}{2}}$ の $x_1$ と $x_2$ に関する 1 次偏導関数を求めなさい.

**解法**

- $x_1$ に関する 1 次偏導関数を求める（1 階偏微分する）ときは，$x_1$ 以外の説明変数（$x_2$）を定数として扱う．
  ⇒1 変数関数の微分と同様の方法で，$x_1$ に関して微分する．
- $x_2$ に関する 1 次偏導関数を求める（1 階偏微分する）ときは，$x_2$ 以外の説明変数（$x_1$）を定数として扱う．
  ⇒1 変数関数の微分と同様の方法で，$x_2$ に関して微分する．

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \underbrace{2}_{\text{定数}} \cdot \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} + \underbrace{3}_{\text{定数}} \cdot 1 x_1^{1-1} \underbrace{x_2}_{\text{定数}} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3 \underbrace{x_1^0}_{=1} x_2 = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + \underbrace{3x_1}_{\text{定数}} \cdot 1 x_2^{1-1} + \underbrace{4}_{\text{定数}} \cdot \frac{1}{2} x_2^{\frac{1}{2}-1} = 3x_1 \underbrace{x_2^0}_{=1} + 2x_2^{-\frac{1}{2}} = 3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}.$$

---

**例題 2.2** $z = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ の $x$ と $y$ に関する 1 次偏導関数を求めなさい．

**解法**

- $x$ に関する 1 次偏導関数を求める（1 階偏微分する）ときは，$x$ 以外の説明変数（$y$）を定数として扱う．
  ⇒1 変数関数の微分と同様の方法で，$x$ に関して微分する．
- $y$ に関する 1 次偏導関数を求める（1 階偏微分する）ときは，$y$ 以外の説明変数（$x$）を定数として扱う．
  ⇒1 変数関数の微分と同様の方法で，$y$ に関して微分する．

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} \underbrace{y^{\frac{1}{3}}}_{\text{定数}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{x^{\frac{2}{3}}}_{\text{定数}} \cdot \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1} = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}.$$

---

**例題 2.3** $z = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2)$ の $x_1$ と $x_2$ に関する 1 次偏導関数を求めなさい．

**解法**

- 2 つの関数の積の形となっており，どちらの関数も $x_1$ と $x_2$ の関数．
  ⇒ 積の微分を用いる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^2+x_2^2\right]\right)(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1-x_2] \\
&= (2x_1^{2-1}+\underbrace{0}_{\text{定数の微分}})(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)(1x_1^{1-1}-\underbrace{0}_{\text{定数の微分}}) \\
&= 2x_1(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)\cdot\underbrace{x_1^0}_{=1} \\
&= 2x_1^2-2x_1x_2+x_1^2+x_2^2 \\
&= 3x_1^2-2x_1x_2+x_2^2, \\
\frac{\partial z}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_1^2+x_2^2\right]\right)(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}[x_1-x_2] \\
&= (\underbrace{0}_{\text{定数の微分}}+2x_2^{2-1})(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)(\underbrace{0}_{\text{定数の微分}}-1x_2^{1-1}) \\
&= 2x_2(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)\cdot(-1)\cdot\underbrace{x_2^0}_{=1} \\
&= 2x_1x_2-2x_2^2-(x_1^2+x_2^2) \\
&= 2x_1x_2-2x_2^2-x_1^2-x_2^2 \\
&= -x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2.
\end{aligned}
$$

**例題 2.4** $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ の $x$ と $y$ に関する 1 次偏導関数を求めなさい.

**解法**

- 2 つの関数の商の形となっており，どちらの関数も $x$ と $y$ の関数.
  $\Rightarrow$ 商の微分を用いる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}[x-y]\right)(x+y)-(x-y)\frac{\partial}{\partial x}[x+y]}{(x+y)^2} \\
&= \frac{(1x^{1-1}-\overbrace{0}^{\text{定数の微分}})(x+y)-(x-y)(1x^{1-1}+\overbrace{0}^{\text{定数の微分}})}{(x+y)^2} \\
&= \frac{x^0(x+y)-(x-y)x^0}{(x+y)^2} \\
&= \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} \\
&= \frac{2y}{(x+y)^2}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y}[x-y]\right)(x+y)-(x-y)\frac{\partial}{\partial y}[x+y]}{(x+y)^2} \\
&= \frac{(\overbrace{0}^{\text{定数の微分}}-1y^{1-1})(x+y)-(x-y)(\overbrace{0}^{\text{定数の微分}}+1y^{1-1})}{(x+y)^2} \\
&= \frac{-y^0(x+y)-(x-y)y^0}{(x+y)^2} \\
&= \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} \\
&= -\frac{2x}{(x+y)^2}.
\end{aligned}
$$

---

- 関数 $z = f(u)$ を考える．また，$u$ は多変数関数で，$x$ と $y$ の関数であるとする．つまり，$u = g(x, y)$ とする．$z$ を $x_1$ で，そして $x_2$ で偏微分したい．
  $\Rightarrow u = g(x, y)$ なので，$z = f[g(x, y)]$ と書くことができる．
  $\Rightarrow z$ の説明変数 $u$ の部分に別の関数 $u = g(x, y)$ が入っている．
  $\Rightarrow z = f[g(x, y)]$ は合成関数．
  - ⋆ e.g., $z = (2x + 3y)^2$ は合成関数．
    $\because u = 2x + 3y$ とすると，$z = u^2$ というベキ関数の**説明変数** $u$ **の部分**に別の関数 $u = 2x + 3y$ が代入されているから．

**合成関数の偏微分**：$z = f(u)$ と $u = g(x, y)$ について，$z = f[g(x, y)]$ とすると，

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}.
$$

- $z = f(u)$ は 1 変数関数なので，これの $u$ に関する 1 次導関数は $\dfrac{dz}{du}$ と書く．
- $u = g(x, y)$ は多変数関数なので，これの $x$ と $y$ に関する 1 次偏導関数はそれぞれ，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ と書く．

**例題 2.5** $z = 3\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)^3$ の $x$ と $y$ に関する 1 次偏導関数を求めなさい．

**解法**

- $u = x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$ とすると，$z = 3u^3$ となり，説明変数 $u$ の部分に別の多変数関数が代入された合成関数の形となる．
  $\Rightarrow$ 合成関数の偏微分を適用する．
- 合成関数の微分の適用後，$u$ は必ず元の形 $x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$ に戻す．

$u = x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$ とすると，$z = 3u^3$ となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \underbrace{\frac{d}{du}\left[3u^3\right]}_{\frac{dz}{du}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right]}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \\
&= 3 \cdot 3u^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}}\right) \\
&= 9u^2 \cdot \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{9}{4}\underbrace{u}_{=x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{}^2 x^{-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{9}{4}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)^2 x^{-\frac{3}{4}}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \underbrace{\frac{d}{du}\left[3u^3\right]}_{\frac{dz}{du}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left[x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right]}_{\frac{\partial u}{\partial y}} \\
&= 3 \cdot 3u^{3-1} \cdot \left(\underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + \frac{1}{4}y^{\frac{1}{4}-1}\right) \\
&= 9u^2 \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{9}{4}\underbrace{u}_{=x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{}^2 y^{-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{9}{4}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)^2 y^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned}
$$

- $u = x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$ とせずに，以下のように書いてもよい．

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cdot 3 \left( x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{9}{4} \left( x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^2 x^{-\frac{3}{4}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cdot 3 \left( x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} y^{\frac{1}{4}-1} = \frac{9}{4} \left( x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^2 y^{-\frac{3}{4}}.$$

......................................................................................................