数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 6：多変数関数の 2 階偏微分・交差偏微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

1　多変数関数の 2 階偏微分・交差偏微分（参考書上巻 pp.409-411）

1.1　2 階偏微分

- 多変数関数を 2 度偏微分することを **2 階偏微分**といい，それによって求められた導関数を **2 次偏導関数**という．ここでは 2 変数関数（説明変数が 2 つの関数）のケースで説明する．
- 2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ の x_1 に関する 2 次偏導関数は $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$ と書き，x_2 に関する 2 次偏導関数は $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$ と書く．
  - ⋆ x_i に関する 1 次偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ をさらに x_i に関して微分することを，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 z}{(\partial x_i)^2}$$

    と書くことができる．通常は上式の右辺の分母のカッコを外し，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ と表記する．
  - ⋆ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ 以外にも，次のような書き方がある．

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}z,\ \ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_i^2},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2),\ \ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x_1, x_2).$$

    - ∗ $z = f(x_1, x_2)$ の 2 次偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$ を f_{11}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$ を f_{22} と書くこともある．
    - ∗ $z = z(x_1, x_2)$ の 2 次偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$ を z_{11}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$ を z_{22} と書くこともある．
    - ∗ $z = f(x, y)$ の 2 次偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を f_{xx}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を f_{yy} と書くこともある．
    - ∗ $z = z(x, y)$ の 2 次偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を z_{xx}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z_{yy} と書くこともある．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

1.2　交差偏微分

- ある変数に関する 1 次偏導関数を別の変数に関して偏微分することを**交差偏微分**といい，それによって求められた導関数を**交差偏導関数**という．
- 2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ の x_2 に関する 1 次偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ をさらにもう 1 つの説明変数 x_1 に関して偏微分すると，交差偏導関数は，
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{12}.$$
同様に，x_1 に関する 1 次偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ をさらにもう 1 つの説明変数 x_2 に関して偏微分すると，交差偏導関数は，
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{21}.$$
- 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の交差偏導関数は，
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}，\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

ヤングの定理：$z = f(x_1, x_2)$ において，次の式が成り立つ．

$$f_{12} = f_{21},\ \text{すなわち}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

⇒ どちらの説明変数での偏微分を先に行っても交差偏微分の結果は同じ．

※この定理は，多変数関数の説明変数が 3 つ以上であっても同様に成り立つ．

- $\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right) = f_{12}$，$\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right) = f_{21}$ と定義する場合もあるが，ヤングの定理から，どちらで定義しても交差偏微分の結果は変わらない．

1.3　偏導関数の導出

例題 1.3.1　$z = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 3x_1x_2 + 4x_2^{\frac{1}{2}}$ の 2 次偏導関数と交差偏導関数を求めなさい．

解法

- まず，全ての変数（x_1 と x_2）について 1 次偏導関数を求める．
- 「x_1 に関する 1 次偏導関数」をさらに x_1 に関して偏微分すると「x_1 に関する 2 次偏導関数」が，「x_2 に関する 1 次偏導関数」をさらに x_2 に関して偏微分すると「x_2 に関する 2 次偏導関数」が導出できる．
  $\Rightarrow$2 次偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$ の 2 つ．
- 続いて，「x_2 に関する 1 次偏導関数」をさらに x_1 に関して偏微分すると片方の交差偏導関数が導出でき，ヤングの定理を適用するともう片方の交差偏導関数が導出できる．
  $\Rightarrow$ 交差偏導関数は，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}$ の 2 つ．

x_1 と x_2 に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_1} &= 2 \cdot \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} + 3x_2 \cdot 1x_1^{1-1} + 0 = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2 x_1^0 = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 0 + 3x_1 \cdot 1x_2^{1-1} + 4 \cdot \frac{1}{2} x_2^{\frac{1}{2}-1} = 3x_1 x_2^0 + 2x_2^{-\frac{1}{2}} = 3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

である．よって，2 次偏導関数は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2\right] = -\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = -\frac{1}{2} x_1^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}\right] = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + \underbrace{2}_{\text{定数}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_2^{-\frac{1}{2}-1} = -x_2^{-\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

となる．また，交差偏導関数は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}\right] = 3 \cdot 1x_1^{1-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = 3\underbrace{x_1^0}_{=1} = 3.$$

ヤングの定理より，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = \underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}}_{=3} = 3.$$

である．

....