数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 7：多変数関数の 1 階全微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

1　1 階全微分（参考書上巻 pp.254-257）

- 多変数関数において，全ての説明変数が微小に変化したときの被説明変数の変化量を**全微分**という．
- 全微分を求めるプロセスも，**全微分**という．
- 多変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全微分は，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$
$$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n,$$

  などの書き方がある．
  - ⋆ $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}dx_1$ は，x_1 の微小な変化が z の変化に与える効果．
    同様に，$\dfrac{\partial z}{\partial x_2}dx_2$ は，x_2 の微小な変化が z の変化に与える効果，$\cdots$．
    ⇒「$\dfrac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial x_n}dx_n = dz$」は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の全てが微小に変化したときの z の変化量．
- 関数を 1 回のみ全微分することを **1 階全微分**という．

例題 1.1　$z = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ の 1 階全微分を求めなさい．

解法

- まず x と y に関する 1 次偏導関数を求め，それを全微分の式に代入する．

x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}y^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1} = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}.$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

となる．よって，z の 1 階全微分は，

$$dz = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} dx + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} dy = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}dx + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}dy$$

である．

> ※ dx と dy はそれぞれ 1 つの記号なので，さらに指数の法則を使って計算して
>
> $$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}+1}y^{\frac{1}{3}}d + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}+1}d = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}d + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}d$$
>
> としてはいけない．

例題 1.2 $z = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 3x_1x_2 + 4x_2^{\frac{1}{2}}$ の 1 階全微分を求めなさい．

解法

- まず x_1 と x_2 に関する 1 次偏導関数を求め，それを全微分の式に代入する．

x_1 と x_2 に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2\cdot\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}-1} + 3\cdot 1x_1^{1-1}x_2 + 0 = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_1^0x_2 = x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 + 3x_1\cdot 1x_2^{1-1} + 4\cdot\frac{1}{2}x_2^{\frac{1}{2}-1} = 3x_1x_2^0 + 2x_2^{-\frac{1}{2}} = 3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}$$

となる．よって，z の 1 階全微分は，

$$dz = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x_1}}_{=x_1^{-\frac{1}{2}}+3x_2} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x_2}}_{=3x_1+2x_2^{-\frac{1}{2}}} dx_2 = \left(x_1^{-\frac{1}{2}} + 3x_2\right)dx_1 + \left(3x_1 + 2x_2^{-\frac{1}{2}}\right)dx_2$$

である．

> ※ dx_1 と dx_2 はそれぞれ 1 つの記号なので，さらに指数の法則を使った計算をしてはいけない．