数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 8：陰関数定理

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

1　陰関数の導関数（参考書上巻 pp.266-281）

1.1　陽関数と陰関数

- $y = f(x)$ の形，すなわち「被説明変数 $= f($説明変数$)$」の形の関数を**陽関数**という．
  - ⋆ e.g., $y = 5x^2 + 1$.
    ⇒ 説明変数 x の各値に対して，被説明変数 y は $y = 5x^2 + 1$ というルールでただ 1 つに（一意に）決まる．
- 被説明変数の決定ルールが明示されていない関数を**陰関数**という．
  - ⋆ e.g., $y - 5x^2 - 1 = 0$. このとき，x と y は $y - 5x^2 - 1 = 0$ を満たすような値に決まる．
  - ⋆ 一般化すると，$F(y, x) = 0$. このとき，x と y は $F(y, x) = 0$ を満たすような値に決まる．
  - ⋆ 通常，「$= 0$」の形で表す．

1.2　陰関数定理

- 陰関数を，$F(y, x) = 0$ とする．さらに，$z = F(y, x)$ とおく．
- $z = F(y, x)$ の全微分は，
$$dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial x}dx = F_y dy + F_x dx.$$
- $z = F(y, x) = 0$ としている．0 は定数で変化しないので，z の変化量は 0.
  ⇒ z の全微分は 0．つまり $dz = 0$.
- $\underline{F_y \neq 0\ \text{とする．}}$ $dz = 0$ なので，
$$F_y dy + F_x dx = 0 \Longleftrightarrow F_y dy = -F_x dx \Longleftrightarrow dy = -\frac{F_x}{F_y} \cdot dx \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

陰関数定理：陰関数 $F(y,x)=0$ について，$F_y \neq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

が成り立つ．

- **陰関数定理が有用なケース**：y の x に関する 1 次導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたいが，与えられた関数が陽関数 $y=f(x)$ の形ではなく，陰関数 $F(y,x)=0$ の形．
  $\Rightarrow$ 陰関数定理を使うと，$F_y \neq 0$ であれば $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる．

例題 1.2.1 $F(x,y) = -9x^2 + y - 3 = 0$ で定義される陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

解法

- これは y の 1 次導関数を求める問題．ところが，与えられている関数は陽関数 $y=f(x)$ の形ではなく，陰関数の形．
  $\Rightarrow$ 陰関数定理を適用する．

$F(x,y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = -9\cdot 2x^{2-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = -18x,$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + 1y^{1-1} - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = \underbrace{y^0}_{=1} = 1$$

となる．よって，$F_y = 1 \neq 0$ である．したがって，陰関数定理が適用でき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-18x}{1} = 18x$$

である．

例題 1.2.2 $F(x,y) = 2x^2 + e^y - 1 = 0$ で定義される陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

解法

- これは y の 1 次導関数を求める問題．ところが，与えられている関数は陽関数 $y=f(x)$ の形ではなく，陰関数の形．
  $\Rightarrow$ 陰関数定理を適用する．
- e^y は自然指数関数．

$F(x,y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 2 \cdot 2x^{2-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = 4x,$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + e^y - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = e^y$$

となる．ここで，e^y は自然指数関数なので，自然指数関数の性質より，$F_y = e^y > 0$, つまり $\underline{F_y \neq 0}$ である．よって，陰関数定理が適用でき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x}{e^y}$$

である．

. . . .

例題 1.2.3 $F(x,y) = x^3 + 2^y - 2 = 0$ で定義される陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

解法

- これは y の 1 次導関数を求める問題．ところが，与えられている関数は陽関数 $y = f(x)$ の形ではなく，陰関数の形．
  $\Rightarrow$ 陰関数定理を適用する．
- 2^y は指数関数であることに注意！

$F(x,y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 3x^{3-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = 3x^2,$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + 2^y \ln 2 - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = 2^y \ln 2$$

となる．ここで，2^y は指数関数なので，指数関数の性質より，$2^y > 0$ である．また，$\ln 2 > 0$ である．よって，$F_y = 2^y \ln 2 > 0$, つまり $\underline{F_y \neq 0}$ である．よって，陰関数定理が適用でき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2}{2^y \ln 2}$$

である．

. . . .