数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 9：多変数関数の 2 階全微分

北村友宏 *

2016 年 3 月 19 日

1　多変数関数の 2 階全微分（参考書上巻 pp.411-413）

- 多変数関数を 2 度全微分することを **2 階全微分**という．
  ここでは 2 変数関数のケースで説明する．
- 2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ の 2 階全微分は d^2z と書く．
  - ⋆ $z = f(x_1, x_2)$ の 2 階全微分 d^2z は，1 階全微分「$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$」をさらに全微分したもの．

$$d^2z = d(dz) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}[dz]\right) dx_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}[dz]\right) dx_2$$

    と書くことができる．
  - ⋆ 全微分する際，微小な変化を表す dx_1 や dx_2 は**定数として扱う**．

....

$\boxed{\text{例題 1.1}}$ $z = x^2y^3$ の 1 階全微分と 2 階全微分を求めなさい．

$\boxed{\text{解法}}$

- $z = f(x, y) = x^2y^3$ として，まず z の x と y に関する 1 次偏導関数を求め，それを全微分の式に代入して 1 階全微分 dz を求める．
  - ⋆ z の 1 次偏導関数は f_x，f_y の 2 つ．
- 続いて，dz の x と y に関する 1 次偏導関数を求め，それを全微分の式に代入して 2 階全微分 d^2z を求める．このとき，x と y は説明変数として，dx と dy は定数として扱う．
  - ⋆ dz の 1 次偏導関数は，$\dfrac{\partial}{\partial x}[dz]$，$\dfrac{\partial}{\partial y}[dz]$ の 2 つ．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

$z = f(x, y) = x^2y^3$ とする．$z = f(x, y)$ の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{2-1}\underbrace{y^3}_{\text{定数}} = 2xy^3,$$
$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{x^2}_{\text{定数}}\cdot 3y^{3-1} = 3x^2y^2$$

となる．よって，z の 1 階全微分は，

$$dz = \underbrace{f_x}_{=2xy^3}dx + \underbrace{f_y}_{=3x^2y^2}dy = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

である．

また，dz の x と y に関する 1 次偏導関数は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[dz] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2xy^3dx + 3x^2y^2dy\right] \\
&= 2\cdot 1x^{1-1}\underbrace{y^3dx}_{\text{定数}} + 3\cdot 2x^{2-1}\underbrace{y^2dy}_{\text{定数}} \\
&= 2\underbrace{x^0}_{=1}y^3dx + 6xy^2dy \\
&= 2y^3dx + 6xy^2dy, \\
\frac{\partial}{\partial y}[dz] &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^3dx + 3x^2y^2dy\right] \\
&= \underbrace{2x}_{\text{定数}}\cdot 3y^{3-1}\underbrace{dx}_{\text{定数}} + \underbrace{3x^2}_{\text{定数}}\cdot 2y^{2-1}\underbrace{dy}_{\text{定数}} \\
&= 6xy^2dx + 6x^2ydy
\end{aligned}$$

となる．よって，z の 2 階全微分は，

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}[dz]}_{=2y^3dx+6xy^2dy}dx + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}[dz]}_{=6xy^2dx+6x^2ydy}dy \\
&= (2y^3dx + 6xy^2dy)dx + (6xy^2dx + 6x^2ydy)dy \\
&= 2y^3(dx)^2 + 6xy^2(dy)(dx) + 6xy^2(dx)(dy) + 6x^2y(dy)^2 \\
&= 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2
\end{aligned}$$

である．

※ d^2z は $d\times dz$ という意味，dx^2 と dy^2 はそれぞれ $dx\times dx, dy\times dy$ という意味であることに注意．