数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 10：総和記号

北村友宏 *

2016 年 3 月 20 日

1　総和記号（参考書上巻 pp.77-80）

- 例えば，

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

  ★「$\sum$」は総和記号.

  ★ $\sum_{i=1}^{5} x_i$ と書いた場合，$i = 1$ から出発し，i を 1 ずつ増やしながら「$i = 1$ のときの x_i」，「$i = 2$ のときの x_i」，$\cdots$ の順に足していき，$i = 5$ になった時点で足すのをやめる，という意味.

  ★ $\sum_{i} x_i$ と書くこともある．この場合，「i が何番目から何番目までなのか」は文脈で判断.

  ★ $\sum x_i$ と書くこともある．この場合，「何について何番目から何番目まで合計するのか」は文脈で判断.

例題 1.1 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ を，総和記号を用いずに表しなさい.

解法

- $i = 1$ から出発.
- i を 1 ずつ増やしながら「$i = 1$ のときの x_i」，「$i = 2$ のときの x_i」，と順に足していく.
- $i = n$ になった時点で足すのをやめる.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

例題 1.2 $\sum_{i=4}^{6} x_i$ を，総和記号を用いずに表しなさい.

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

解法

- $i=4$ から出発.
- i を 1 ずつ増やしながら「$i=4$ のときの x_i」,「$i=5$ のときの x_i」, と順に足していく.
- $i=6$ になった時点で足すのをやめる.

$$\sum_{i=4}^{6} x_i = x_4 + x_5 + x_6.$$

例題 1.3 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ を，総和記号を用いずに表しなさい.

解法

- $i=1$ から出発.
- i を 1 ずつ増やしながら「$i=1$ のときの x_i」,「$i=2$ のときの x_i」, と順に足していく.
- $i=n$ になった時点で足すのをやめる.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

例題 1.4 $x_1(x_1+1)^2 + x_2(x_2+1)^2 + x_3(x_3+1)^2 + x_4(x_4+1)^2$ を，総和記号を用いて書き換えなさい.

解法

- 第 1 項，第 2 項，と進むにつれて 1 ずつ増えているのは，x の添え字（1 項につき 2 ヶ所).
  $\Rightarrow$ x の添え字を i とする.
- 添え字は 1 からスタートし，4 になった時点で足すのをやめている.
  $\Rightarrow$ i は 1 から 4 まで.

$$x_1(x_1+1)^2 + x_2(x_2+1)^2 + x_3(x_3+1)^2 + x_4(x_4+1)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i(x_i+1)^2.$$

例題 1.5 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$ を証明しなさい.

解法

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ax_i$ を，総和記号を用いない形に書き換え,「添え字 i のない（各項で共通の）a」について整理する.
- a について整理した式を，総和記号を用いて書き換える.
- 証明するときは，証明の始まりと終わりを必ず明記する.「（証明）〜（証明終）」や"*Proof.*〜□"など.

（証明） $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ax_i = ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n = a(\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{=\sum_{i=1}^{n} x_i}) = a\sum_{i=1}^{n} x_i.$ （証明終）

例題 1.6 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$ を，総和記号を用いずに表しなさい．

解法

- $i = 1$ から $i = n$ までの総和であるが，総和の対象となっている a には i が入っていない．
  ⇒「$i = 1$ のときの a」,「$i = 2$ のときの a」，の順に「$i = n$ のときの a」までを足す，と考える．

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{ 個}} = na.$$

例題 1.7 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} (x_i - a)$ を，総和記号を用いずに表しなさい．

解法

- $i = 1$ から出発．
- i を 1 ずつ増やしながら「$i = 1$ のときの $(x_i - a)$」,「$i = 2$ のときの $(x_i - a)$」，と順に足していく．
- $i = 3$ になった時点で足すのをやめる．

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - a) = x_1 - a + x_2 - a + x_3 - a = x_1 + x_2 + x_3 - 3a.$$

例題 1.8 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}$ を，総和記号を用いずに表しなさい．

解法

- まず $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right)$ と考え，カッコの中を $j = 1$ から $j = 3$ まで合計する（i はそのまま）．
- それをさらに $i = 1$ から $i = 3$ まで合計する．

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\underbrace{x_{i1}}_{j=1} + \underbrace{x_{i2}}_{j=2} + \underbrace{x_{i3}}_{j=3}) \\
&= \underbrace{(x_{11} + x_{12} + x_{13})}_{i=1} + \underbrace{(x_{21} + x_{22} + x_{23})}_{i=2} + \underbrace{(x_{31} + x_{32} + x_{33})}_{i=3} \\
&= x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}.
\end{aligned}$$