数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 11：行列・ベクトル

北村友宏 *

2016 年 3 月 20 日

1　行列（参考書上巻 pp.65-77, 91-102）

1.1　行列の表記

- 数値や変数などを長方形に配列したものを**行列**（matrix）という．
  - ⋆ e.g., $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$（2 行 4 列），$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$（3 行 2 列）．
- m 行 n 列の行列 $\boldsymbol{A}$ は，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

  - ⋆ $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $(i = 1, 2, \ldots, m,\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$ と書くこともある．
  - ⋆ 配列の各項（a_{11} や a_{12} など）を行列の**要素**という．
  - ⋆ m 行 n 列の行列の**次元**は「$m \times n$ 次元」と表現する．

1.2　行列の演算

2 つの行列を $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ と $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ とする．

- **行列の足し算・引き算**：$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の次元が同じ（「$\boldsymbol{A}$ の行数と $\boldsymbol{B}$ の行数」が同じで，かつ「$\boldsymbol{A}$ の列数と $\boldsymbol{B}$ の列数」も同じ）ときのみ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ や $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ が定義できる．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{A}$ が 3 行 4 列で，$\boldsymbol{B}$ も 3 行 4 列であれば $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ や $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ が定義できる．
  - ⋆ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ は対応する要素同士（1 行 1 列目同士，1 行 2 列目同士，$\cdots$）を足し合わせて，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の各要素から，それらに対応する $\boldsymbol{B}$ の要素を引いて求める．

....

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

例題 1.2.1 $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ を求めなさい．

解法

- 2 つの行列の対応する要素同士を足し合わせる．

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & 5+2 \\ 6+3 & 7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}.$$

....

例題 1.2.2 $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ を求めなさい．

解法

- 左の行列の各要素から，それらに対応する右の行列の要素を引く．

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-1 & 5-2 \\ 6-3 & 7-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

....

- 行列の一定倍を，行列の**スカラー倍**という．
- **行列のスカラー倍**：行列にスカラーを掛けると，その行列の**全ての**要素にスカラーが掛けられる．

....

例題 1.2.3 $-2\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ を求めなさい．

解法

- -2 というスカラーを行列に掛けるので，その行列の全ての要素を -2 倍する．

$$-2\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 9 & -2\cdot 5 \\ -2\cdot 6 & -2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -10 \\ -12 & -14 \end{bmatrix}.$$

....

2 つの行列を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とする．

- **行列の掛け算**：$\boldsymbol{A}$ の列数と $\boldsymbol{B}$ の行数が同じときのみ $\boldsymbol{AB}$ が定義できる．
  - ⋆ $\boldsymbol{A}$ が $\underline{m\text{ 行}}n$ 列，$\boldsymbol{B}$ が n 行 $\underline{r\text{ 列}}$ とすると，$\boldsymbol{AB}$ を計算した結果は $\underline{m\text{ 行 }r\text{ 列}}$ の行列となる．
    e.g., $\boldsymbol{A}$ が $\underline{2\text{ 行}}3$ 列で，$\boldsymbol{B}$ が 3 行 $\underline{2\text{ 列}}$ であれば $\boldsymbol{AB}$ を計算した結果は $\underline{2\text{ 行 }2\text{ 列}}$ の行列となる．$\boldsymbol{AB}$ を計算した結果の行列を $\boldsymbol{C}$ とすると，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

* 計算結果 $\boldsymbol{C}$ の第 1 行 1 列目：
  先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $a_{11}b_{11}$，2 番目同士の積 $a_{12}b_{21}$，3 番目同士の積 $a_{13}b_{31}$ を合計．
* 計算結果 $\boldsymbol{C}$ の第 1 行 2 列目：
  先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $a_{11}b_{12}$，2 番目同士の積 $a_{12}b_{22}$，3 番目同士の積 $a_{13}b_{32}$ を合計．
* 計算結果 $\boldsymbol{C}$ の第 2 行 1 列目：
  先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 2 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $a_{21}b_{11}$，2 番目同士の積 $a_{22}b_{21}$，3 番目同士の積 $a_{23}b_{31}$ を合計．
* 計算結果 $\boldsymbol{C}$ の第 2 行 2 列目：
  先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 2 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $a_{21}b_{12}$，2 番目同士の積 $a_{22}b_{22}$，3 番目同士の積 $a_{23}b_{32}$ を合計．

★ $\boldsymbol{AB}$ を計算することを，「行列 $\boldsymbol{B}$ に左側から行列 $\boldsymbol{A}$ を掛ける」や「行列 $\boldsymbol{A}$ に右側から行列 $\boldsymbol{B}$ を掛ける」と表現する．

例題 1.2.4 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ を求めなさい．

解法

- $\boldsymbol{AB}$ は「2 行 3 列」と「3 行 2 列」の積なので，計算結果は「2 行 2 列」となる．
  - ★ 計算結果の第 1 行 1 列目：
    先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $1 \cdot 3$，2 番目同士の積 $2 \cdot 1$，3 番目同士の積 $3 \cdot 1$ を合計．
  - ★ 計算結果の第 1 行 2 列目：
    先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $1 \cdot 2$，2 番目同士の積 $2 \cdot 2$，3 番目同士の積 $3 \cdot 3$ を合計．
  - ★ 計算結果の第 2 行 1 列目：
    先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 2 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $2 \cdot 3$，2 番目同士の積 $3 \cdot 1$，3 番目同士の積 $2 \cdot 1$ を合計．
  - ★ 計算結果の第 2 行 2 列目：
    先行行列 $\boldsymbol{A}$ の第 2 行と後方行列 $\boldsymbol{B}$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $2 \cdot 2$，2 番目同士の積 $3 \cdot 2$，3 番目同士の積 $2 \cdot 3$ を合計．
- $\boldsymbol{BA}$ は「3 行 2 列」と「2 行 3 列」の積なので，計算結果は「3 行 3 列」となる．
  - ★ $\boldsymbol{AB}$ と同様の方法で計算．

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2+3 & 2+4+9 \\ 6+3+2 & 4+6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 11 & 16 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 & 3\cdot 2 + 2\cdot 3 & 3\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 & 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & 6+6 & 9+4 \\ 1+4 & 2+6 & 3+4 \\ 1+6 & 2+9 & 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 13 \\ 5 & 8 & 7 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

- **この結果からわかること：$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$** なので，行列の掛け算の順序を入れ替えると別の行列になる．
  $\Rightarrow$ 行列の計算の際，**行列の掛け算の順序を入れ替えてはいけない**．
- **補足**：「$\boldsymbol{AB}$ は定義できるが，$\boldsymbol{BA}$ は定義できない」ということもある．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{A}$ が 2 行 3 列で，$\boldsymbol{B}$ が 3 行 4 列のとき，$\boldsymbol{A}$ の列数（3）と $\boldsymbol{B}$ の行数（3）が同じなので $\boldsymbol{AB}$ は定義できる．しかしながら，$\boldsymbol{B}$ の列数（4）と $\boldsymbol{A}$ の行数（2）が異なるため，$\boldsymbol{BA}$ は定義できない．

....

※**「行列の割り算」は存在しない**（ある行列を他の行列で割ることはできない）．

1.3　正方行列・単位行列・零行列

- 行数と列数が等しい行列を**正方行列**という．
  - ⋆ e.g., $\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$（2 行 2 列），$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 13 \\ 5 & 8 & 7 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$（3 行 3 列）．
- 主対角要素（最も左上から最も右下に向かう対角線上の要素）が全て 1，その他の要素が全て 0 である正方行列を**単位行列**という．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
  - ⋆ 単位行列は通常，$\boldsymbol{I}$ で表し，$\boldsymbol{I}$ の右下に行数・列数を添え字として書くことがある．
  - ⋆ 任意の行列 $\boldsymbol{A}$ について，
    $$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$$
    が成り立つ（$\boldsymbol{I}$ の行数・列数は $\boldsymbol{A}$ との掛け算ができるように設定する必要がある）．
- 全ての要素が 0 である行列を**零行列**という．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{O}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{O}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
  - ⋆ 零行列は通常，$\boldsymbol{O}$ で表す．
  - ⋆ 正方行列でなくてもよい．
  - ⋆ 以下の法則が成立する．

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{O}_{m\times n} = \boldsymbol{O}_{m\times n} + \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} \quad \text{（零行列を足しても元の行列と同じ），}$$
$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{O}_{n\times r} = \boldsymbol{O}_{m\times r} \quad \text{（零行列を右側から掛けると零行列になる），}$$
$$\boldsymbol{O}_{r\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{O}_{r\times n} \quad \text{（零行列を左側から掛けると零行列になる）．}$$

1.4　行列の転置

- 行列の行と列を全て入れ替えることを**転置**という．
  - ⋆ 行列 $\boldsymbol{A}$ を転置したものを $\boldsymbol{A}'$ または $\boldsymbol{A}^T$ と書く．
    ※ $\boldsymbol{A}'$ の $'$ は導関数という意味ではない．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$．
  - ⋆ 以下の法則が成立する．

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}')' &= \boldsymbol{A} \quad &&\text{（転置したものをさらに転置すると元に戻る），} \\
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' &= \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}' \quad &&\text{（和の転置は各行列の転置の和），} \\
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' &= \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' \quad &&\text{（積の転置は各行列の転置を，順序を逆にして掛ける）．}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$ を満たす正方行列を**対称行列**という．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$．つまり，$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$．
  - ⋆ 転置しても元の行列と同じ．

2　ベクトル（参考書上巻 pp. 68-69, 80-91）

- 列が 1 つだけの行列を**列ベクトル**という．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$．（$n$ 行 1 列）
  - ⋆ 単に**ベクトル**という場合，列ベクトルを指すことがある．
- 行が 1 つだけの行列を**行ベクトル**という．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$．（1 行 n 列）
  - ⋆ ベクトルを列ベクトルとして定義した場合，それを転置すれば行ベクトルになる．
- ベクトルも行列と同様に和，差，積の計算ができる．

....

例題 2.1　$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$ を求めなさい．

解法

- $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}$ を求めるため，まず $\boldsymbol{u}$ を転置する（$\boldsymbol{u}'$ を求める）．$\boldsymbol{u}$ は 2 行 1 列なので，$\boldsymbol{u}'$ は 1 行 2 列となる．
- $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}$ は「1 行 2 列」と「2 行 1 列」の積なので，計算結果は「1 行 1 列」となる．
  - ⋆ **計算結果の第 1 行 1 列目：**
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{v}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $1 \cdot 6$，2 番目

同士の積 $3 \cdot 5$ を合計．

- $\boldsymbol{uv}'$ を求めるには，$\boldsymbol{v}$ を転置する（$\boldsymbol{v}'$ を求める）．$\boldsymbol{v}$ は 2 行 1 列なので，$\boldsymbol{v}'$ は 1 行 2 列となる．
- $\boldsymbol{uv}'$ は「2 行 1 列」と「1 行 2 列」の積なので，計算結果は「2 行 2 列」となる．
  - ⋆ 計算結果の第 1 行 1 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{v}'$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $1 \cdot 6$ が入る（2 番目以降はない）．
  - ⋆ 計算結果の第 1 行 2 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{v}'$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $1 \cdot 5$ が入る（2 番目以降はない）．
  - ⋆ 計算結果の第 2 行 1 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 2 行と後方ベクトル $\boldsymbol{v}'$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $3 \cdot 6$ が入る（2 番目以降はない）．
  - ⋆ 計算結果の第 2 行 2 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 2 行と後方ベクトル $\boldsymbol{v}'$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $3 \cdot 5$ が入る（2 番目以降はない）．

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ なので，$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ である．よって，

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$$

となる．また，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ なので，$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$ である．よって，

$$\boldsymbol{uv}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 & 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$$

である．

....

例題 2.2 $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{uu}'$ を求めなさい．

解法

- まず $\boldsymbol{u}$ を転置する（$\boldsymbol{u}'$ を求める）．$\boldsymbol{u}$ は 2 行 1 列なので，$\boldsymbol{u}'$ は 1 行 2 列となる．
- $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ は「1 行 2 列」と「2 行 1 列」の積なので，計算結果は「1 行 1 列」となる．
  - ⋆ 計算結果の第 1 行 1 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $3 \cdot 3$，2 番目同士の積 $4 \cdot 4$ を合計．
- $\boldsymbol{uu}'$ は「2 行 1 列」と「1 行 2 列」の積なので，計算結果は「2 行 2 列」となる．
  - ⋆ 計算結果の第 1 行 1 列目：
    先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $3 \cdot 3$ が入る（2 番目以降はない）．
  - ⋆ 計算結果の第 1 行 2 列目：

先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 1 行と後方ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $3 \cdot 4$ が入る（2 番目以降はない）．

- ⋆ 計算結果の第 2 行 1 列目：
  先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 2 行と後方ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 1 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $4 \cdot 3$ が入る（2 番目以降はない）．
- ⋆ 計算結果の第 2 行 2 列目：
  先行ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 2 行と後方ベクトル $\boldsymbol{u}'$ の第 2 列をみる．両者の 1 番目同士の積 $4 \cdot 4$ が入る（2 番目以降はない）．

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ なので，$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ である．よって，

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25$$

となる．また，

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

である．

- $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ や $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'$ は計算できる．しかしながら，$\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ つまり $\boldsymbol{u}^2$ は計算できない．
  ∵ 先行ベクトル $\boldsymbol{u}_{2\times1}$ の列数（1）と後方ベクトル $\boldsymbol{u}_{2\times1}$ の行数（2）が異なるため，積が定義できないから．
  ⇒ ベクトルを 2 乗することはできない．

....