

数学補習プログラム（社会人院生向け）

トピック 12：行列式

北村友宏*

2016年3月20日

1 行列式（参考書上巻 pp.122-137）

1.1 行列式の表記

- 正方行列 A の行列式（determinant）は、 $|A|$ と書く。 $|A|$ は A の絶対値ではない。
 - ★ A の行列式を、 $\det A$ や $\det(A)$ と書くこともある。
 - ★ e.g., 2行2列の行列 A を,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

とすると、 A の行列式 $|A|$ の定義は、

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

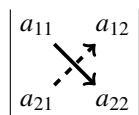
（計算方法は後述.）

- 行列式は正方行列についてのみ定義でき、スカラーとなる。

1.2 行列式の計算

- 行列式の計算方法 1：サラスの方法
 - ★ サラスの方法は2行2列と3行3列の行列式にのみ適用できる。

2行2列の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{(a_{11}a_{22})}_{=a_{11}a_{22}} - \underbrace{(a_{12}a_{21})}_{=a_{21}a_{12}}.$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

例題 1.2.1 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

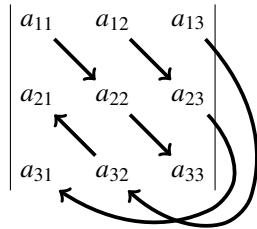
解法

- 右下がりの要素の積 : $1 \cdot 8$.
- 右上がりの要素の積 : $3 \cdot 2$.

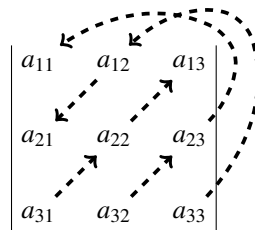
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2.$$

3 行 3 列の場合

1 行目から出発, 右下がり



3 行目から出発, 右上がり



• 3 行 3 列の行列式の計算手順

1 行目から出発, 右下がりの 3 要素の積を計算する. 右端に達したら方向転換 (左上がりに) し, まだ使っていない列のうち最も近い列の 3 行目へ. 出発点が 3 ヶ所あるので積は 3 組できる.

⇒ その 3 組の積を合計.

⇒ 3 行目から出発, 右上がりの 3 要素の積を計算する. 右端に達したら方向転換 (左下がりに) し, まだ使っていない列のうち最も近い列の 1 行目へ. 出発点が 3 ヶ所あるので積は 3 組できる.

⇒ その 3 組の積を合計.

⇒ 「1 行目から出発, 右下がりの 3 要素の積の 3 組の合計」から「3 行目から出発, 右上がりの 3 要素の積の 3 組の合計」を引く.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overbrace{= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}}^{(\text{「1 行目から出発, 右下がりの 3 要素の積」を 3 組合計})} - \overbrace{(\text{「3 行目から出発, 右上がりの 3 要素の積」を 3 組合計})}^{=(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})}.$$

例題 1.2.2 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

解法 (サラスの方法)

- 1 行目から出発, 右下がりの 3 要素の積の 3 組の合計 : $1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 1$.
- 3 行目から出発, 右上がりの 3 要素の積の 3 組の合計 : $2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 1}_{1 \text{ 行目から出発, 右下がりの 3 要素の積の 3 組の合計}} - \underbrace{[2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1]}_{3 \text{ 行目から出発, 右上がりの 3 要素の積の 3 組の合計}} \\
= -6 + 20 - 3 - (4 + 15 + 6) \\
= -14.$$

-
- 3行3列の行列式 $|A|$ は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \\
&= \underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11})}_{a_{11} \text{ を含む項}} + \underbrace{(a_{12}a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21})}_{a_{12} \text{ を含む項}} + \underbrace{(a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13})}_{a_{13} \text{ を含む項}} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{*}
\end{aligned}$$

★ (*) の第 1 項にある $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は $|A|$ から a_{11} の所在する行と列を取り除いた部分の行列式。

$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は a_{11} の余因子と呼ばれ、 A_{11} と書く。

★ (*) の第 2 項にある $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ は $|A|$ から a_{12} の所在する行と列を取り除いた部分の行列式。

$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ は a_{12} の余因子と呼ばれ、 A_{12} と書く。

★ (*) の第 3 項にある $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ は $|A|$ から a_{13} の所在する行と列を取り除いた部分の行列式。

$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ は a_{13} の余因子と呼ばれ、 A_{13} と書く。

⇒ $|A|$ の第 i 行 j 列目の要素 a_{ij} の余因子は、

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} \text{ の所在する行と列を取り除いた部分の行列式}).$$

- 行列式の計算方法 2 : ラプラス展開

★ ラプラス展開は 4 行 4 列以上の行列式にも適用できる。

★ 「余因子法」や「余因子展開」ということもある。

★ e.g., 3行3列の行列式 $|A|$ を, 第1行に沿ってラプラス展開すると,

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
 &= a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=A_{11}} + a_{12} \underbrace{(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=A_{12}} + a_{13} \underbrace{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{=A_{13}}.
 \end{aligned}$$

これは前のページで $|A|$ を書き換えた (*) と同じもの.

★ ラプラス展開はどの行や列に沿って行っても結果は変わらない.

第2行に沿ったラプラス展開は,

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^3 a_{2j}A_{2j}.$$

第1列に沿ったラプラス展開は,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^3 a_{i1}A_{i1}.$$

例題 1.2.2 (再掲)

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

解法 (ラプラス展開)

- ここでは第1行に沿ったラプラス展開を説明する.
- 第1行1列目の要素は1, その余因子は, $(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$.
- 第1行2列目の要素は2, その余因子は, $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.
- 第1行3列目の要素は-1, その余因子は, $(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.
- 余因子において2行2列の行列式が出てくるが, その部分にはサラスの方法を適用する.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= -2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 - 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot 5) - [1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)] \\
 &= -6 - 15 - 2(3 - 10) - (3 + 4) \\
 &= -6 - 15 - 6 + 20 - 3 - 4 \\
 &= -14.
 \end{aligned}$$

例題 1.2.3

行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

解法 (ラプラス展開)

- ここでは第 3 列に沿ったラプラス展開を説明する.
- 第 1 行 3 列目の要素は 0, その余因子は, $(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.
- 第 2 行 3 列目の要素は 2, その余因子は, $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.
- 第 3 行 3 列目の要素は 0, その余因子は, $(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$.
- 余因子において 2 行 2 列の行列式が出てくるが, その部分にはサラスの方法を適用する.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} &= \underbrace{0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{=0} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -2(3 \cdot 5 - 1 \cdot 2) \\ &= -2(15 - 2) \\ &= -26. \end{aligned}$$

- 0 を含む行または列に沿ってラプラス展開すると, 足し算の手間を省くことができる.

1.3 行列式の性質

※ 2 行 2 列の行列式で説明するが, 以下の性質はどのような次元の行列式にも当てはまる.

- 性質 I: 全ての行と列を入れ替えても行列式の値は変わらない. すなわち,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- 性質 II: 任意の 2 行または任意の 2 列を入れ替えると, 行列式の符号が変わる. すなわち,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- 性質 III: 任意の 1 行または任意の 1 列をスカラー k 倍すると, 行列式の値は k 倍になる. すなわち,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

★ 行列のスカラー倍との違いに注意!

行列の場合, 全ての要素にスカラー k を掛けると, 行列がスカラー k 倍になる. すなわち,

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{21} \\ ka_{12} & ka_{22} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

- 性質 IV: 任意の行を一定倍したものを他の行に加えたり他の行から引いたりしても, 行列式の値は変わらない. すなわち,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} + ka_{11} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同様に, 任意の列を一定倍したものを他の列に加えたり他の列から引いたりしても, 行列式の値は変わらない.

- 性質 V: ある行が他の行の一定倍であれば, 行列式の値は 0 となる. 例えば,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 2a_{11} & 2a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

同様に, ある列が他の列の一定倍であれば, 行列式の値は 0 となる.

例題 1.3.1

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

解法

- 「行列式の性質 IV: 任意の行(列)を一定倍したものを他の行(列)に加えたり他の行(列)から引いたりしても, 行列式の値は変わらない」を利用し, 任意の行(列)を変換して要素の一部を 0 にすることで, ラプラス展開での足し算の手間を省く(複数の行または列を変換してよい).

★ 第 2 行を変換する(第 1 行の 4 倍を第 2 行から引く). これを $\underbrace{r_2}_{\text{変換対象}} \quad \underbrace{-4r_1}_{\text{変換内容}}$ と表現する.

⇒ 第 2 行 1 列目の要素が 0 になる.

★ 第 3 行を変換する(第 1 行の 2 倍を第 3 行から引く). これを $\underbrace{r_3}_{\text{変換対象}} \quad \underbrace{-2r_1}_{\text{変換内容}}$ と表現する.

⇒ 第 3 行 1 列目の要素が 0 になる.

⇒ この変換をすると,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 - 4 \cdot 1 & 3 - 4 \cdot (-1) & 3 - 4 \cdot 2 \\ 2 - 2 \cdot 1 & 2 - 2 \cdot (-1) & 5 - 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

となる. 右辺の新しい行列式を第 1 列に沿ってラプラス展開する.

- 第 1 行 1 列目の要素は 1, その余因子は, $(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.
- 第 2 行 1 列目の要素は 0, その余因子は, $(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.
- 第 3 行 1 列目の要素は 0, その余因子は, $(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$.

- 余因子において 2 行 2 列の行列式が出てくるが、その部分にはサラスの方法を適用する。

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2-4r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4-4\cdot 1 & 3-4\cdot(-1) & 3-4\cdot 2 \\ 2-2\cdot 1 & 2-2\cdot(-1) & 5-2\cdot 2 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4-4 & 3+4 & 3-8 \\ 2-2 & 2+2 & 5-4 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 0\cdot(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}}_{=0} \\
 & = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = 7\cdot 1 - 4\cdot(-5) \\
 & = 7 + 20 \\
 & = 27.
 \end{aligned}$$

※変換対象の行または列、つまり足される側・引かれる側（この例題では第 2 行と第 3 行）には何も掛けない。

誤った計算例：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{4}r_2-r_1 \\ \frac{1}{2}r_3-r_1 \\ \neq \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{4}\cdot 4-1 & \frac{1}{4}\cdot 3-(-1) & \frac{1}{4}\cdot 3-2 \\ \frac{1}{2}\cdot 2-1 & \frac{1}{2}\cdot 2-(-1) & \frac{1}{2}\cdot 5-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{7}{8} + \frac{10}{4} = \frac{27}{8}.$$

- この例題では、以下の変換をすることによってもラプラス展開の手間を省くことができる。

★ 第 2 列を変換する（第 1 列の 1 倍を第 2 列に足す）。これを $c_2 + c_1$ と表現する。

★ 第 3 列を変換する（第 1 列の 2 倍を第 3 列から引く）。これを $c_3 - 2c_1$ と表現する。

すると、

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2+c_1 \\ c_3-2c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1+1 & 2-2\cdot 1 \\ 4 & 3+4 & 3-2\cdot 4 \\ 2 & 2+2 & 5-2\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

例題 1.3.2 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ を証明しなさい。

解法

- 証明問題なので、証明の始まりと終わりを明記。
- 2 行 2 列の行列式なので、サラスの方法を使えば簡単。
- 右下がりの要素の積： $1\cdot 9$ 。
- 右上がりの要素の積： $3\cdot 3$ 。

(証明) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0.$ (証明終)

.....