数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 13：逆行列

北村友宏 *

2016 年 3 月 20 日

1　逆行列（参考書上巻 pp.102-108, 137-142）

1.1　逆行列とは

- 正方行列 $\boldsymbol{A}$ において，
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$
を満たす $\boldsymbol{A}^{-1}$ を $\boldsymbol{A}$ の**逆行列**という．
  - ⋆ 逆行列を，元の行列に右側から掛けても左側から掛けても単位行列になる．
  - ⋆ e.g., $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{d}_{n\times 1}$ を，$\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \cdots$ の形に書き換えたいときは，
$$\underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{A}_{n\times n}}_{=\boldsymbol{I}_n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{d}_{n\times 1} \Longleftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x}_{n\times 1}}_{=\boldsymbol{x}_{n\times 1}} = \boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{d}_{n\times 1} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{d}_{n\times 1}$$
のように，両辺に左側から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ける．
- 正方行列であっても，その逆行列は必ずしも存在するとは限らない（詳細は後述）．
- 逆行列をもつ正方行列を**非特異行列**という．
- 逆行列をもたない正方行列を**特異行列**という．
- 正方行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が非特異であれば，以下の法則が成立する．
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \quad \text{（逆行列の逆行列は元の行列），}$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \quad \text{（積の逆行列は各行列の逆行列を，順序を逆にして掛けたもの），}$$
$$(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})' \quad \text{（転置の逆行列は逆行列の転置）．}$$

…………………………………………………………………………………………

例題 1.1.1　$\boldsymbol{D}$ を k 行 r 列の行列，$\boldsymbol{S}$ を r 行 r 列の正方行列とする．また，$\boldsymbol{S}$ は非特異であるとする．このとき，$\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}'$ を証明しなさい．

解法

- 証明問題なので，証明の始まりと終わりを明記する．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

- 行列の積の計算では結合法則が使えるので，証明すべき式の左辺の $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}$ の部分をまず計算する．具体的には，逆行列の定義（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ を満たす $\boldsymbol{A}^{-1}$）を適用する．$\boldsymbol{S}$ が $\boldsymbol{A}$ に相当．
- すると単位行列が出てきて $\boldsymbol{D}\boldsymbol{I}_r$ という部分が現れるので，結合法則によりその部分を計算する．具体的には，単位行列の性質（$\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$）を適用する．$\boldsymbol{D}$ が $\boldsymbol{A}$ に相当．

(証明)　$$\boldsymbol{D}\underbrace{\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}}_{=\boldsymbol{I}_r}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}' = \underbrace{\boldsymbol{D}\boldsymbol{I}_r}_{=\boldsymbol{D}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}'.$$　（証明終）

....

1.2　逆行列の計算

- $n \times n$ 正方行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{=\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}}$$

のように計算する．

★ adj $\boldsymbol{A}$ は余因子行列（adjoint matrix）．

★ 余因子行列の要素の配列に注意！

adj $\boldsymbol{A}$ の第 1 行 2 列目には，$\boldsymbol{A}$ の第 2 行 1 列目の余因子 A_{21} が，adj $\boldsymbol{A}$ の第 1 行 3 列目には，$\boldsymbol{A}$ の第 3 行 1 列目の余因子 A_{31} が，$\cdots$ 入っている．

adj $\boldsymbol{A}$ の第 2 行 1 列目には，$\boldsymbol{A}$ の第 1 行 2 列目の余因子 A_{12} が，adj $\boldsymbol{A}$ の第 3 行 1 列目には，$\boldsymbol{A}$ の第 1 行 3 列目の余因子 A_{13} が，$\cdots$ 入っている．

- $\boldsymbol{A}^{-1}$ は $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ のときのみ計算できる．
  $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ の逆行列は，$\boldsymbol{A}$ の行列式が 0 でないときのみ存在し，$\boldsymbol{A}$ の行列式が 0 のときには存在しない．

....

例題 1.2.1　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

解法

- まず，$\boldsymbol{A}$ の各要素の余因子を求める．

$\boldsymbol{A}$ の各要素の余因子は，以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 3\end{vmatrix} = -2\cdot 3 - 3\cdot 5 = -6 - 15 = -21,\\
A_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(1\cdot 3 - 2\cdot 5) = -(3-10) = 7,\\
A_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-2) = 3+4 = 7,\\
A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix} = -[2\cdot 3 - 3\cdot(-1)] = -(6+3) = -9,\\
A_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-1) = 3+2 = 5,\\
A_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(1\cdot 3 - 2\cdot 2) = -(3-4) = 1,\\
A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-2)\cdot(-1) = 10-2 = 8,\\
A_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix} = -[1\cdot 5 - 1\cdot(-1)] = -(5+1) = -6,\\
A_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 1\cdot 2 = -2-2 = -4
\end{aligned}
$$

である．

- 次に，$\boldsymbol{A}$ の行列式を求める．
  - ⋆ 既に $\boldsymbol{A}$ の各要素の余因子を求めているので，ラプラス展開をするとよい（どの行・列に沿って展開してもよい）．
  - ⋆ ここでは第 1 列に沿ったラプラス展開を説明する．

よって，$\boldsymbol{A}$ の行列式は，

$$|\boldsymbol{A}| = 1\cdot A_{11} + 1\cdot A_{21} + 2\cdot A_{31} = 1\cdot(-21) + 1\cdot(-9) + 2\cdot 8 = -21 - 9 + 16 = -14.$$

- 最後に，逆行列の計算方法に従い，$\boldsymbol{A}$ の逆行列を求める．

したがって，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{-14}\begin{bmatrix}-21 & -9 & 8\\ 7 & 5 & -6\\ 7 & 1 & -4\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-\frac{1}{14}\cdot(-21) & -\frac{1}{14}\cdot(-9) & -\frac{1}{14}\cdot 8\\ -\frac{1}{14}\cdot 7 & -\frac{1}{14}\cdot 5 & -\frac{1}{14}\cdot(-6)\\ -\frac{1}{14}\cdot 7 & -\frac{1}{14}\cdot 1 & -\frac{1}{14}\cdot(-4)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}3/2 & 9/14 & -4/7\\ -1/2 & -5/14 & 3/7\\ -1/2 & -1/14 & 2/7\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

である.

....