

# 数学補習プログラム（社会人院生向け）

## トピック 14：1 変数関数の制約条件なし最適化問題

北村友宏\*

2016年3月26日

### 1 極大・極小の条件（参考書上巻 pp.303-325）

#### 1.1 経済学における最適化

- ある対象を最大や最小にすることを最適化という。
- 経済学における「制約条件なし最適化問題」の例としては以下のようなものがある。
  - ★ 企業は利潤を最大にするために、財の生産量をどの程度にすべきか？
  - ★ 企業は利潤を最大にするために、生産要素（資本や労働）の使用量をどの程度にすべきか？

#### 1.2 「極大・極小」と「最大・最小」

- 1変数関数  $y = f(x)$  を考える。
  - ★ 説明変数  $x$  に特定の値  $x = x_0$  を代入したものを  $f(x_0)$  と書く。  
e.g.,  $y = f(x) = x^2 + 1$  において、 $x$  に特定の値 2 を代入すると、 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ .

- 説明変数の特定の値  $x^*$  の近傍の任意の  $x$  について、 $f(x^*) \geq f(x)$  となるとき、 $x = x^*$  において関数の値は極大となり、そのときの関数の値  $f(x^*)$  を極大値という。
- 説明変数の特定の値  $x^*$  の近傍の任意の  $x$  について、 $f(x^*) \leq f(x)$  となるとき、 $x = x^*$  において関数の値は極小となり、そのときの関数の値  $f(x^*)$  を極小値という。
- 極大値と極小値を総称して極値という。

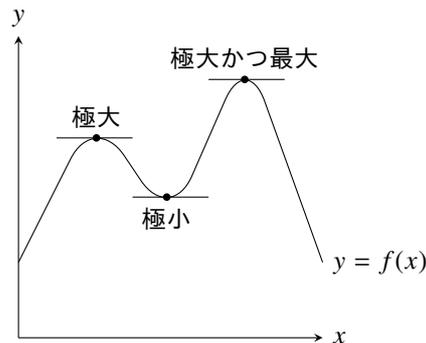
- 関数  $y = f(x)$  の説明変数  $x$  のとりうる値の範囲を定義域という。
  - ★ とりうる値の範囲を「 $x \geq 0$ 」や「 $x > 0$ 」などに限定してもよい。

---

\* Email: [kitamu.tom@gmail.com](mailto:kitamu.tom@gmail.com) URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

- 定義域内の任意の  $x$  について、 $f(x^*) \geq f(x)$  となるとき、 $x = x^*$  において関数の値は最大となり、そのときの関数の値  $f(x^*)$  を最大値という。
- 定義域内の任意の  $x$  について、 $f(x^*) \leq f(x)$  となるとき、 $x = x^*$  において関数の値は最小となり、そのときの関数の値  $f(x^*)$  を最小値という。

- 極大であっても最大であるとは限らず、極小であっても最小とは限らない。



⇒ 接線が水平（接線の傾きが 0）で、かつ説明変数の値の増加につれて接線の傾きが減少傾向にあるところでは関数の値が極大になる。また、接線が水平（接線の傾きが 0）で、かつ説明変数の値の増加につれて接線の傾きが増加傾向にあるところでは関数の値が極小になる。

- 1 次導関数  $f'(x)$  は元の関数  $f(x)$  の変化率（接線の傾き）を表す。
- 2 次導関数  $f''(x)$  は 1 次導関数  $f'(x)$  の変化率を表す。  
⇒ 2 次導関数  $f''(x)$  は「元の関数  $f(x)$  の変化率（接線の傾き）」の変化率を表す。
- $x = x_0$  での接線の傾きは、1 次導関数  $f'(x)$  に  $x = x_0$  を代入すれば求めることができ、 $x = x_0$  での接線の傾きの変化率は、2 次導関数  $f''(x)$  に  $x = x_0$  を代入すれば求めることができる。
  - ★ 1 次導関数に  $x = x_0$  を代入したものを  $x = x_0$  における微分係数といい、 $f'(x_0)$  などと書く。
  - ★ 2 次導関数に  $x = x_0$  を代入したものを、 $f''(x_0)$  などと書く。
- $x = x_0$  から説明変数  $x$  が微小に増加するとき、
  - ★  $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$  関数の値  $y$  は増加。
  - ★  $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$  関数の値  $y$  は減少。
  - ★  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  関数の接線の傾き  $f'(x)$  は増加。
  - ★  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$  関数の接線の傾き  $f'(x)$  は減少。

⇒ 1 次導関数の値（元の関数の微分係数）が 0 で、かつ 2 次導関数の値が負であるところでは関数の値が極大になる。また、1 次導関数の値（元の関数の微分係数）が 0 で、かつ 2 次導関数の値が正であるところでは関数の値が極小になる。

- （元の関数の）微分係数が 0、つまり  $f'(x^*) = 0$  となる  $x^*$  を  $f(x)$  の停留点という。
  - ★ 停留点において関数の値が極値をとる可能性がある。

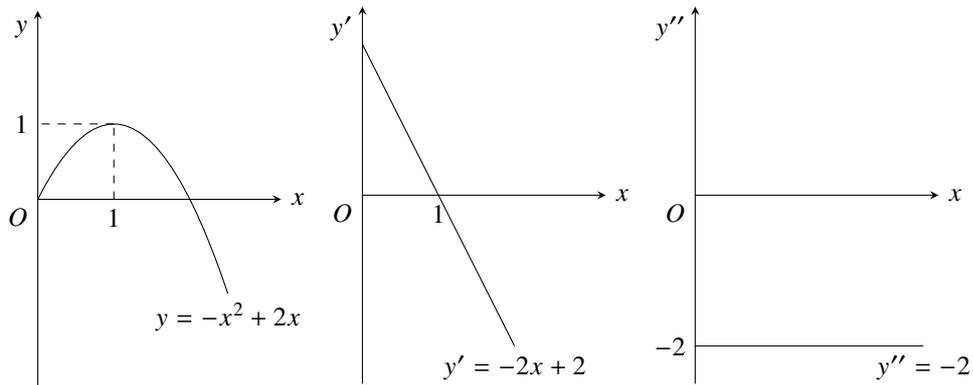
- e.g.,  $y = f(x) = -x^2 + 2x$  の 1 次導関数は,

$$y' = f'(x) = -1 \cdot 2x^{2-1} + 2 \cdot 1x^{1-1} = -2x + 2 \underbrace{x^0}_{=1} = -2x + 2,$$

2 次導関数は,

$$y'' = f'(x) = [-2x + 2]' = -2 \cdot 1x^{1-1} + 0 = -2 \underbrace{x^0}_{=1} = -2.$$

元の関数, 1 次導関数, 2 次導関数を図で表すと, 以下のようになる.



- ★ 接線が水平になるところ (接線の傾きが 0 になるところ) で, 元の関数の値  $y$  が極大になっており, 最大にもなっている.

⇒ 1 次導関数の値  $y'$  が 0 のところで元の関数の値  $y$  が極大かつ最大になっている.

⇒ 具体的には,

$$y' = 0 \iff -2x + 2 = 0 \iff x = 1$$

のところで元の関数の値  $y$  が極大かつ最大になっている. その極大値・最大値は,

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1.$$

- ★ 2 次導関数の値  $y''$  は常に負.

⇒  $x$  が増加するにつれ, 元の関数の接線の傾きは必ず小さくなっていく.

⇒ このときは,  $y' = 0$  となる停留点  $x = 1$  で, 元の関数の値  $y$  は 最大 になる.

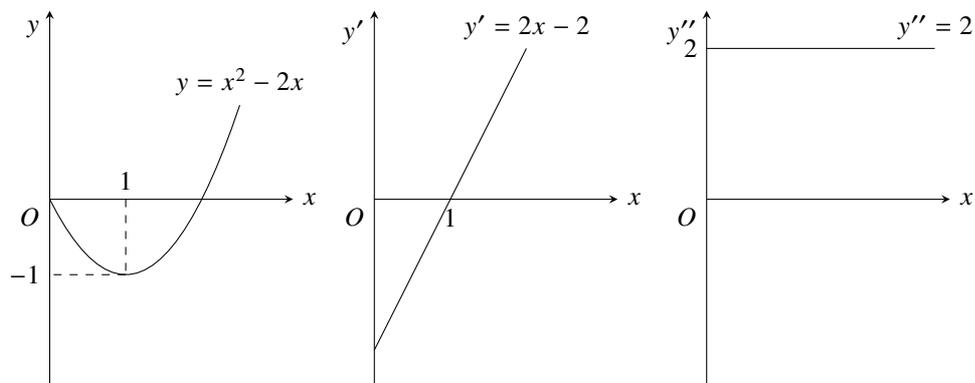
- e.g.,  $y = f(x) = x^2 - 2x$  の 1 次導関数は,

$$y' = f'(x) = 2x^{2-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} = 2x - 2 \underbrace{x^0}_{=1} = 2x - 2,$$

2 次導関数は,

$$y'' = f'(x) = [2x - 2]' = 2 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 2 \underbrace{x^0}_{=1} = 2.$$

元の関数, 1 次導関数, 2 次導関数を図で表すと, 以下のようになる.



★ 接線が水平になるところ（接線の傾きが 0 になるところ）で、元の関数の値  $y$  が極小になっており、最小にもなっている。

⇒ 1 次導関数の値  $y'$  が 0 のところで元の関数の値  $y$  が極小かつ最小になっている。

⇒ 具体的には、

$$y' = 0 \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

のところで元の関数の値  $y$  が極小かつ最小になっている。その極小値・最小値は、

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

★ 2 次導関数の値  $y''$  は常に正。

⇒  $x$  が増加するにつれ、元の関数の接線の傾きは必ず大きくなっていく。

⇒ このときは、 $y' = 0$  となる停留点  $x = 1$  で、元の関数の値  $y$  は 最小 になる。

1 変数関数  $y = f(x)$  について、極大・極小の判断は以下の通り。

- $x = x^*$  において「 $f'(x^*) = 0$  (1 階条件)」を満たし、かつ、 $x = x^*$  において「 $f''(x^*) < 0$  (極大化の 2 階条件)」を満たせば、 $f(x^*)$  は極大値。
- $x = x^*$  において「 $f'(x^*) = 0$  (1 階条件)」を満たし、かつ、 $x = x^*$  において「 $f''(x^*) > 0$  (極小化の 2 階条件)」を満たせば、 $f(x^*)$  は極小値。

※上記以外の場合、 $x = x^*$  において  $y = f(x)$  が極値をとるか否かは不明。

1 変数関数  $y = f(x)$  について、最大・最小の判断は以下の通り。

- $x = x^*$  において「 $f'(x^*) = 0$  (1 階条件)」を満たし、かつ、定義域内の任意の  $x$  について「 $f''(x) < 0$ 」となっていれば、 $f(x^*)$  は最大値。
- $x = x^*$  において「 $f'(x^*) = 0$  (1 階条件)」を満たし、かつ、定義域内の任意の  $x$  について「 $f''(x) > 0$ 」となっていれば、 $f(x^*)$  は最小値。

- 1 変数関数  $y = f(x)$  の極値を求めるには、「微分係数が 0 (1 階条件)」を満たす説明変数の値 (停留点) を求め、それを  $f(x)$  に代入する。
- その極値の極大・極小や最大・最小を判断するには、2 次導関数を求め、符号を確認する。

.....  
**例題 1.2.1**  $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$  の極値を求め、それが極大値か極小値か、あるいは「極大値かつ最大値」か「極小値かつ最小値」かを判断しなさい。

**解法** 1 次導関数は、

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} - 1x^{1-1} - 0 = x - \underbrace{x^0}_{=1} = x - 1$$

である。1 階条件は、

$$x - 1 = 0 \iff x = 1$$

となる。このときの  $f(x)$  の値  $f(1)$  は、

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2.$$

また、2 次導関数は、

$$f''(x) = [x - 1]' = 1x^{1-1} - 0 = \underbrace{x^0}_{=1} = 1$$

となる。よって、任意の  $x$  について  $f''(x) > 0$  なので、 $f(x)$  は  $x = 1$  において最小値をとる。したがって、 $f(x)$  の極値は  $-2$  で、極小値かつ最小値である。  
.....

## 2 利潤最大化問題（参考書上巻 pp.325-334）

.....  
**例題 2.1** ある独占企業が生産する財の需要関数は

$$q = 12 - p$$

で与えられる。ただし、 $q$  は財の需要量、 $p$  は財の価格である。この需要関数を価格  $p$  について解いたものを逆需要関数という。逆需要関数は

$$p = 12 - q$$

となる。また、この独占企業の費用関数は

$$c = 2q + 1$$

で与えられる。ただし、 $c$  は独占企業の費用である。このとき、独占企業の利潤を最大化するための財の生産量と、その生産量のもとでの価格および利潤を求めなさい。また、その生産量において利潤が最大となることを確認しなさい。

### 経済学での一般的な仮定

- 企業は需要量を満たすだけ財を生産する。生産した財は全て消費者に売る。つまり、  
需要量 = 生産量。
- 独占企業は自ら財の価格を決定する。この例題の場合、 $q$  に依存し、逆需要関数に沿って価格  $p$  を決定する。

### 解法

- 利潤 = 収入 - 費用。
  - ★ 収入 = 価格 × 数量。数量（生産量）を選択する問題なので、「価格」の部分に逆需要関数を代入して  $q$  の関数にする。
- 利潤関数（ $q$  の関数）を設定し、その停留点を求める。それを逆需要関数に代入すれば価格を求めることができ、利潤関数に代入すれば利潤を求めることができる。
- 求めた利潤が最大となっているかを判断するには 2 次導関数を求め、符号を確認する。
- 最大化したい目的関数： $(12 - q)q - (2q + 1)$ 。

企業の利潤を  $\pi$  とすると、利潤関数は、

$$\underbrace{\pi}_{\text{利潤}} = \underbrace{pq}_{\text{収入}} - \underbrace{c}_{\text{費用}} = (12 - q)q - (2q + 1) = (12 - q)q - 2q - 1$$

と書くことができる。利潤最大化問題は、

$$\max_q (12 - q)q - 2q - 1$$

となる。利潤関数を  $q$  で微分すると、

$$\begin{aligned}\pi' &= [12 - q]'q + (12 - q)[q]' - [2q]' - [1]' \\ &= -1 \cdot 1q^{1-1} \cdot q + (12 - q) \cdot 1q^{1-1} - 2 \cdot 1q^{1-1} - 0 \\ &= -\underbrace{q^0}_{=1} \cdot q + (12 - q) \underbrace{q^0}_{=1} - 2 \underbrace{q^0}_{=1} \\ &= -q + 12 - q - 2 \\ &= -2q + 10\end{aligned}$$

となる。よって、1 階条件から利潤を最大にする生産量を求めると、

$$\pi' = 0 \iff -2q + 10 = 0 \iff 10 = 2q \iff q = 5.$$

このときの価格は、

$$p = 12 - 5 = 7$$

となり、利潤は、

$$\pi = (12 - 5)5 - 2 \cdot 5 - 1 = 7 \cdot 5 - 10 - 1 = 35 - 10 - 1 = 24$$

となる。

したがって、利潤を最大にする生産量を  $q^*$ 、そのもとでの価格と利潤をそれぞれ  $p^*, \pi^*$  とすると、

$$q^* = 5, p^* = 7, \pi^* = 24.$$

また、利潤関数の 2 次導関数は

$$\pi'' = [-2q + 10]' = -2 \cdot 1q^{1-1} + 0 = -2 \underbrace{q^0}_{=1} = -2 < 0$$

となり、任意の  $q$  について  $\pi'' < 0$  である。したがって、 $\pi' = 0$  を満たす  $q$ 、つまり  $q^* = 5$  において利潤が最大となっている。

.....