数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 16：多変数関数の制約条件なし最適化問題

北村友宏 *

2016 年 3 月 26 日

1　2 変数関数の制約条件なし最適化問題（参考書上巻 pp.403-433）

1.1　2 変数関数における極大・極小および最大・最小の判断

2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ について，極大・極小の判断は以下の通り．

- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ において「$f_1 = 0$ かつ $f_2 = 0$（1 階条件）」を満たし，かつ，$\underline{x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}$ において，「$f_{11} < 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$（極大化の 2 階条件）」を満たせば，$x_1 = x_1^*$ と $x_2 = x_2^*$ において $f(x_1^*, x_2^*)$ は極大値．
- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ において「$f_1 = 0$ かつ $f_2 = 0$（1 階条件）」を満たし，かつ，$\underline{x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}$ において，「$f_{11} > 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$（極小化の 2 階条件）」を満たせば，$x_1 = x_1^*$ と $x_2 = x_2^*$ において $f(x_1^*, x_2^*)$ は極小値．

※上記以外の場合，$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ において $z = f(x_1, x_2)$ が極値をとるか否かは不明．

- 2 階条件は，$\underline{\text{ある特定の } x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}$ と $\underline{\text{任意の } dx_1, dx_2}$ について $d^2z < 0$ や $d^2z > 0$ となる条件で，判別式から導出されたもの．
  ⇒2 次偏導関数 f_{11}, f_{22} や交差偏導関数 f_{12} が x_1 や x_2 に依存する（x_1 や x_2 の値に応じて変化する）場合，2 階条件を満たしていても，「$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$」以外の x_1 と x_2 の値の組み合わせにおいては d^2z が 0 になったり d^2z の符号が変わったりする可能性がある．
  ⇒$\underline{\text{ある特定の } x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}$ のみで 2 階条件を満たしていても，それだけでは $f(x_1, x_2)$ が厳密な凹関数か厳密な凸関数かは不明．
- 2 階条件による極大・極小の判断は，$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ における f_{11}, f_{22}, f_{12} を計算し，そのときのヘッセ行列式 $|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$ を求めれば判断できる．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ について，**最大・最小**の判断は以下の通り．

- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ において「$f_1 = 0$ かつ $f_2 = 0$（1 階条件）」を満たし，かつ，<u>定義域内の任意の</u>x_1 と x_2 について， $f_{11} < 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$ となれば，$f(x_1, x_2)$ は厳密な凹関数となる．そうであれば，$f(x_1^*, x_2^*)$ は極大値かつ**最大**値.
- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ において「$f_1 = 0$ かつ $f_2 = 0$（1 階条件）」を満たし，かつ，<u>定義域内の任意の</u>x_1 と x_2 について， $f_{11} > 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$ となれば，$f(x_1, x_2)$ は厳密な凸関数となる．そうであれば，$f(x_1^*, x_2^*)$ は極小値かつ**最小**値.

- 2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ の極値を求めるには，「全ての 1 次偏導関数の値が 0（1 階条件）」を満たす説明変数の値の組み合わせ（停留点）を求め，それを $f(x_1, x_2)$ に代入する．
- その極値の極大・極小や最大・最小を判断するには，ヘッセ行列式を求め，符号を確認する．

1.2　2 変数関数の最適化

例題 1.2.1 $z = f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + 1$ の極値を求め，それが極大値か極小値か，あるいは「極大値かつ最大値」か「極小値かつ最小値」かを判断しなさい．

解法 1 次偏導関数は，

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{定数}} \cdot 2x_1^{2-1} - \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = -x_1,$$

$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\underbrace{0}_{\text{定数の微分}} - \underbrace{5}_{\text{定数}} \cdot 2x_2^{2-1} + \underbrace{0}_{\text{定数の微分}} = -10x_2$$

である．よって，1 階条件から停留点を求めると，

$$f_1 = 0 \iff -x_1 = 0 \iff x_1 = 0, \tag{1}$$
$$f_2 = 0 \iff -10x_2 = 0 \iff x_2 = 0 \tag{2}$$

となる．このときの z の値は，

$$f(0, 0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 5 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

である．2 次偏導関数は，

$$f_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \underbrace{-1}_{\text{定数}} \cdot 1x_1^{1-1} = -\underbrace{x_1^0}_{=1} = -1,$$

$$f_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \underbrace{-10}_{\text{定数}} \cdot 1x_2^{1-1} = -10\underbrace{x_2^0}_{=1} = -10$$

となる．また，交差偏導関数は，

$$f_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}[-10x_2] = \underbrace{0}_{\text{定数の微分}}$$

である．したがって，ヘッセ行列式は，

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)\cdot(-10)}_{\text{右下がりの要素の積}} - \underbrace{0\cdot 0}_{\text{右上がりの要素の積}} = 10 - 0 = 10$$

となる．よって，任意の x_1 と x_2 について，$f_{11} = -1 < 0$ かつ $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = 10 > 0$ であることから，$z = f(x_1, x_2)$ は厳密な凹関数である．これは，$z = f(x_1, x_2)$ が $x_1 = x_2 = 0$ において最大となることを意味するので，$z = f(x_1, x_2)$ の極値は 1 で，それは極大値かつ最大値である．

……………………………………………………………………………………………

2　経済学への応用（参考書上巻 pp.459-475）

……………………………………………………………………………………………

例題 2.1　ある独占企業は第 1 財と第 2 財の 2 種類を生産しており，第 1 財と第 2 財の逆需要関数は，それぞれ

$$p_1 = 54 - 2q_1 - q_2,$$
$$p_2 = 54 - q_1 - 2q_2$$

で与えられる．ただし，q_1 と q_2 はそれぞれ第 1 財と第 2 財の需要量，p_1 と p_2 はそれぞれ第 1 財と第 2 財の価格である．また，この独占企業の費用関数は

$$c = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2$$

で与えられる．ただし，c は独占企業の費用である．このとき，独占企業の利潤を最大化するための第 1 財と第 2 財の生産量，その生産量のもとでの第 1 財と第 2 財の価格および利潤を求めなさい．また，その生産量において利潤が最大となることを確認しなさい．

解法

- 利潤＝収入 − 費用．
  - ★ 2 種類の財を生産しているので，「収入＝第 1 財の価格×第　1 財の数量＋第 2 財の価格×第　2 財の数量」．数量（生産量）を選択する問題なので，「価格」の部分に逆需要関数を代入して q_1 と q_2 の関数にする．
- 利潤関数（q_1 と q_2 の関数）を設定する．
- 最大化したい目的関数：$(54 - 2q_1 - q_2)q_1 + (54 - q_1 - 2q_2)q_2 - (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2)$.

企業の利潤を π とすると，利潤関数は，

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\pi}_{\text{利潤}} &= \underbrace{p_1q_1 + p_2q_2}_{\text{収入}} - \underbrace{c}_{\text{費用}} \\
&= (54 - 2q_1 - q_2)q_1 + (54 - q_1 - 2q_2)q_2 - (q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2) \\
&= (54 - 2q_1 - q_2)q_1 + (54 - q_1 - 2q_2)q_2 - q_1^2 - q_1q_2 - q_2^2
\end{aligned}
$$

と書くことができる．利潤最大化問題は，

$$
\max_{q_1,q_2} \ (54 - 2q_1 - q_2)q_1 + (54 - q_1 - 2q_2)q_2 - q_1^2 - q_1q_2 - q_2^2
$$

となる．利潤関数を q_1 と q_2 で偏微分すると，

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= -2 \cdot q_1 + (54 - 2q_1 - q_2) \cdot 1 - 1 \cdot q_2 - 2q_1 - q_2 \\
&= -2q_1 + 54 - 2q_1 - q_2 - q_2 - 2q_1 - q_2 \\
&= 54 - 6q_1 - 3q_2, \\
\pi_2 &= -1 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2 + (54 - q_1 - 2q_2) \cdot 1 - q_1 - 2q_2 \\
&= -q_1 - 2q_2 + 54 - q_1 - 2q_2 - q_1 - 2q_2 \\
&= 54 - 3q_1 - 6q_2
\end{aligned}
$$

となる．よって，1 階条件は，

$$
\pi_1 = 0 \iff 54 - 6q_1 - 3q_2 = 0 \iff 6q_1 + 3q_2 = 54, \tag{1}
$$
$$
\pi_2 = 0 \iff 54 - 3q_1 - 6q_2 = 0 \iff 3q_1 + 6q_2 = 54 \tag{2}
$$

である．(1) × 2 − (2) から，利潤が最大となる第 1 財の生産量を q_1^* とすると，

$$
12q_1 - 3q_1 + 6q_2 - 6q_2 = 108 - 54 \iff 9q_1 = 54 \iff q_1^* = 6.
$$

となる．これを (2) に代入する．利潤が最大となる第 2 財の生産量を q_2^* とすると，

$$
3 \cdot 6 + 6q_2 = 54 \iff 18 + 6q_2 = 54 \iff 6q_2 = 36 \iff q_2^* = 6.
$$

このときの第 1 財と第 2 財の価格をそれぞれ p_1^*, p_2^* とすると，

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= 54 - 2 \cdot 6 - 6 = 54 - 12 - 6 = 36, \\
p_2^* &= 54 - 6 - 2 \cdot 6 = 54 - 6 - 12 = 36
\end{aligned}
$$

となり，このときの利潤を π^* とすると，

$$
\pi^* = 36 \cdot 6 + 36 \cdot 6 - 6^2 - 6 \cdot 6 - 6^2 = 216 + 216 - 36 - 36 - 36 = 324.
$$

また，利潤関数の 2 次偏導関数は

$$
\pi_{11} = -6, \ \pi_{22} = -6
$$

であり，交差偏導関数は，

$$
\pi_{12} = -3
$$

となる．よって，ヘッセ行列式は，

$$
|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-6) - (-3) \cdot (-3) = 36 - 9 = 27
$$

となる．よって，任意の q_1 と q_2 について $\pi_{11} = -6 < 0$ かつ $\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{vmatrix} = 27 > 0$ であることから，利潤関数は厳密な凹関数である．したがって，利潤 π が $q_1^* = q_2^* = 6$ において最大となる．

....

例題 2.2 ある完全競争企業は資本と労働を用いて財を生産しており，コブ・ダグラス型生産関数は

$$y = K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{5}}$$

で与えられる．ただし，y は財の生産量，K は資本量，L は労働量である．また，この財の価格は 5，資本価格は 20，労働価格は 10 である．このとき，企業の利潤を最大化するための 1 階条件を求めなさい．また，その 1 階条件を満たす資本量と労働量において利潤が最大となることを確認しなさい．ただし，$K > 0$, $L > 0$ とする．

経済学での一般的な仮定

- 企業が生産した財は全て消費者に売る．
- 完全競争企業は価格を与えられたものとして（所与として）行動する．この例題を解く際，財価格と資本価格と労働価格は問題文で与えられている数値を使う．

解法

- 利潤＝収入 − 費用．
  - ⋆「収入＝財の価格×財の数量」．
  - ⋆「費用＝資本価格×資本量＋労働価格×労働量」
- 利潤関数（K と L の関数）を設定する．
- 最大化したい目的関数：$5 \cdot K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{5}} - (20K + 10L)$.

企業の利潤を π とすると，利潤関数は,

$$\underbrace{\pi}_{\text{利潤}} = \underbrace{5y}_{\text{収入}} - \underbrace{(20K + 10L)}_{\text{費用}} = 5 \cdot K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{5}} - (20K + 10L) = 5K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{5}} - 20K - 10L$$

と書くことができる．利潤最大化問題は,

$$\max_{K,L} \ 5K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{1}{5}} - 20K - 10L$$

となる．利潤関数を K と L で偏微分すると,

$$\pi_K = 5 \cdot \frac{1}{5} K^{\frac{1}{5}-1} L^{\frac{1}{5}} - 20 = K^{-\frac{4}{5}} L^{\frac{1}{5}} - 20,$$
$$\pi_L = 5K^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{5} L^{\frac{1}{5}-1} - 10 = K^{\frac{1}{5}} L^{-\frac{4}{5}} - 10$$

となる．よって，1 階条件は,

$$\pi_K = 0 \iff K^{-\frac{4}{5}} L^{\frac{1}{5}} - 20 = 0 \iff K^{-\frac{4}{5}} L^{\frac{1}{5}} = 20,$$
$$\pi_L = 0 \iff K^{\frac{1}{5}} L^{-\frac{4}{5}} - 10 = 0 \iff K^{\frac{1}{5}} L^{-\frac{4}{5}} = 10$$

である．
また，利潤関数の 2 次偏導関数は

$$\pi_{KK} = -\frac{4}{5}K^{-\frac{4}{5}-1}L^{\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5}K^{-\frac{9}{5}}L^{\frac{1}{5}},$$
$$\pi_{LL} = K^{\frac{1}{5}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) L^{-\frac{4}{5}-1} = -\frac{4}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{-\frac{9}{5}}$$

であり，交差偏導関数は，

$$\pi_{KL} = \frac{1}{5}K^{\frac{1}{5}-1}L^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}}$$

となる．よって，ヘッセ行列式は，

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}| &= \begin{vmatrix} \pi_{KK} & \pi_{KL} \\ \pi_{KL} & \pi_{LL} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\frac{4}{5}K^{-\frac{9}{5}}L^{\frac{1}{5}} & \frac{1}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}} \\ \frac{1}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}} & -\frac{4}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{-\frac{9}{5}} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{4}{5}K^{-\frac{9}{5}}L^{\frac{1}{5}} \cdot \left(-\frac{4}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{-\frac{9}{5}}\right) - \frac{1}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{16}{25}K^{-\frac{9}{5}+\frac{1}{5}}L^{\frac{1}{5}-\frac{9}{5}} - \frac{1}{25}K^{-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}}L^{-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{16}{25}K^{-\frac{8}{5}}L^{-\frac{8}{5}} - \frac{1}{25}K^{-\frac{8}{5}}L^{-\frac{8}{5}} \\
&= \frac{15}{25}K^{-\frac{8}{5}}L^{-\frac{8}{5}} \\
&= \frac{3}{5}K^{-\frac{8}{5}}L^{-\frac{8}{5}}
\end{aligned}$$

となる．問題文より，$K > 0$, $L > 0$ なので，任意の $K > 0$ と $L > 0$ について $\pi_{KK} < 0$ かつ $\begin{vmatrix} \pi_{KK} & \pi_{KL} \\ \pi_{KL} & \pi_{LL} \end{vmatrix} > 0$ であることから，利潤関数は厳密な凹関数である．したがって，1 階条件を満たす K と L において利潤 π が最大となる．

....