数学補習プログラム（社会人院生向け）
トピック 17：準凹関数・準凸関数

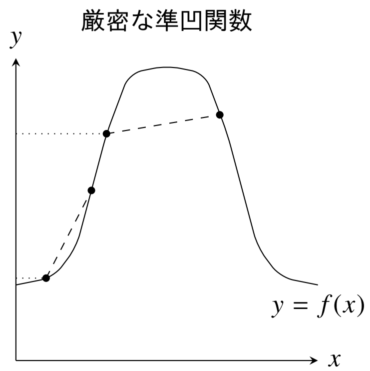
北村友宏 *

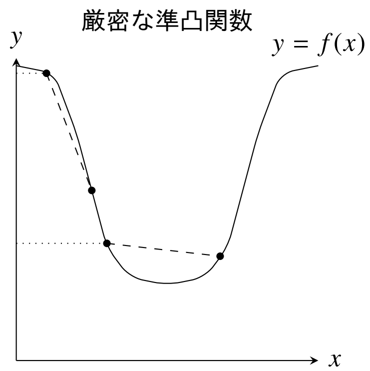
2016 年 3 月 27 日

1　準凹関数・準凸関数（参考書下巻 pp.504-519）

1.1　1 変数関数の場合

- 準凹関数・厳密な準凹関数・準凸関数・厳密な準凸関数の形状（定義ではない）は以下の通り．
  - ★ **準凹関数**：関数のグラフ上の**どの 2 点をとっても**，その 2 点の間の関数のグラフ上の（とってきた 2 点を除く）全ての点の高さが，2 点のうち**低いほうと同じかそれよりも高い**．
  - ★ **厳密な準凹関数**：関数のグラフ上の**どの 2 点をとっても**，その 2 点の間の関数のグラフ上の（とってきた 2 点を除く）全ての点の高さが，2 点のうち**低いほうよりも高い**．
  - ★ **準凸関数**：関数のグラフ上の**どの 2 点をとっても**，その 2 点の間の関数のグラフ上の（とってきた 2 点を除く）全ての点の高さが，2 点のうち**高いほうと同じかそれよりも低い**．
  - ★ **厳密な準凸関数**：関数のグラフ上の**どの 2 点をとっても**，その 2 点の間の関数のグラフ上の（とってきた 2 点を除く）全ての点の高さが，2 点のうち**高いほうよりも低い**．





- 準凹関数・厳密な準凹関数・準凸関数・厳密な準凸関数の定義は以下の通り．
  - ★ 関数 $y = f(x)$ の定義域における任意の u, v と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u + (1 - \theta)v] \geq \min\{f(u), f(v)\}$$

となる $f(x)$ を**準凹関数**という．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

* $\min\{f(u), f(v)\}$ は，$f(u)$ か $f(v)$ のどちらか小さいほうの値.
  * e.g., $\min\{2,3\} = 2$，$\min\{2,-1\} = -1$，$\min\{1,1\} = 1$.

★ 関数 $y = f(x)$ の定義域における任意の u, v（ただし $u \neq v$）と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u + (1-\theta)v] > \min\{f(u), f(v)\}$$

となる $f(x)$ を**厳密な準凹関数**という.

* **狭義準凹関数**または**強い意味の準凹関数**ということもある.

★ 関数 $y = f(x)$ の定義域における任意の u, v と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u + (1-\theta)v] \leq \max\{f(u), f(v)\}$$

となる $f(x)$ を**準凸関数**という.

* $\max\{f(u), f(v)\}$ は，$f(u)$ か $f(v)$ のどちらか大きいほうの値.
* e.g., $\max\{2,3\} = 3$，$\max\{2,-1\} = 2$，$\max\{1,1\} = 1$.

★ 関数 $y = f(x)$ の定義域における任意の u, v（ただし $u \neq v$）と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u + (1-\theta)v] < \max\{f(u), f(v)\}$$

となる $f(x)$ を**厳密な準凸関数**という.

* **狭義準凸関数**または**強い意味の準凸関数**ということもある.

1.2　2 変数関数の場合

- 準凹関数・厳密な準凹関数・準凸関数・厳密な準凸関数の定義は以下の通り.

★ 関数 $z = f(x_1, x_2)$ の定義域における任意の $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \theta u_2 + (1-\theta)v_2] \geq \min\{f(u_1, u_2), f(v_1, v_2)\}$$

となる $f(x_1, x_2)$ を**準凹関数**という.

★ 関数 $z = f(x_1, x_2)$ の定義域における任意の $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$（ただし $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$）と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \theta u_2 + (1-\theta)v_2] > \min\{f(u_1, u_2), f(v_1, v_2)\}$$

となる $f(x_1, x_2)$ を**厳密な準凹関数**という.

★ 関数 $z = f(x_1, x_2)$ の定義域における任意の $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \theta u_2 + (1-\theta)v_2] \leq \max\{f(u_1, u_2), f(v_1, v_2)\}$$

となる $f(x_1, x_2)$ を**準凸関数**という.

★ 関数 $z = f(x_1, x_2)$ の定義域における任意の $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$（ただし $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$）と，$0 < \theta < 1$ を満たす任意の θ について，

$$f[\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \theta u_2 + (1-\theta)v_2] < \max\{f(u_1, u_2), f(v_1, v_2)\}$$

となる $f(x_1, x_2)$ を**厳密な準凸関数**という.

- 制約条件付き最適化問題においては，「目的関数が準凹関数」であることが，「最大値か否か」の判断基準の 1 つ（詳細な説明は内容が高度なため，省略）.
  - ⋆ e.g., 次のコブ・ダグラス型関数

$$z = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

（ただし，$x_1 > 0, x_2 > 0, \alpha > 0, \beta > 0$）は準凹関数（証明は略）.