# 数学補習プログラム（社会人院生向け）<br>トピック 18：制約条件付き最適化問題

北村友宏 *

2016 年 3 月 27 日

## 1　効用最大化とラグランジュ未定乗数法（参考書下巻 pp.481-516, 520-532）

### 1.1　効用最大化問題

- 経済学における「制約条件付き最適化問題」の 1 例として，効用最大化問題がある．
  - ⋆ **効用最大化問題**：消費者は**予算制約のもとで**効用（満足度）を**最大**にするために，財の消費量をどの程度にすべきか？
- 他にも企業の費用最小化問題などがあるが，ここでは消費者の効用最大化問題について説明する．

………………………………………………………………………………………………

**例題 1.1.1**　消費者のコブ・ダグラス型効用関数は，

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

のように与えられる．ここで，$x_1$ は第 1 財の消費量，$x_2$ は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 2，第 2 財の価格が 2，所得が 7 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量およびその消費量のもとでの効用を求めなさい．また，その消費量のもとで効用が**極大**となっていることを確認しなさい．

**経済学での一般的な仮定**

- 消費者は所得の範囲内で財を購入し，消費する．
- 財の消費量が多ければ多いほど効用（満足度）が高まる．
  ⇒ 効用を最大にするには，所得を使い切るように消費するのが最低条件．
  ⇒ ここでは財が 2 種類なので，

  「第 1 財の価格×第 1 財の消費量＋第 2 財の価格×第 2 財の消費量＝所得」

  を満たすように第 1 財と第 2 財の消費量を決める．これが「**制約条件**」で，この場合は**予算制約**とよばれる．

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

**解法（1 変数関数の問題への変換）**

- 最大化したい目的関数：$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.（効用関数）
- 制約条件：$2x_1 + 2x_2 = 7$.（予算制約）

効用最大化問題を，

$$\max_{x_1, x_2} x_1 x_2,$$
$$\text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 = 7$$

と定式化する．

- これは**制約条件付き最適化問題**の 1 つ．
- s.t. は subject to の略で，「〜という制約のもとで」という意味．

制約条件式を書き換えると，

$$2x_1 + 2x_2 = 7 \iff 2x_2 = 7 - 2x_1 \iff x_2 = \frac{7}{2} - x_1. \tag{1}$$

これを効用関数に代入すると，

$$u = x_1 \underbrace{\left(\frac{7}{2} - x_1\right)}_{=x_2} \tag{2}$$

となり，$u$ が $x_1$ のみの 1 変数関数となる．これが最大になるような $x_1$ を求める．$u$ を $x_1$ で微分すると，

$$u' = \frac{du}{dx_1} = 1 \cdot \left(\frac{7}{2} - x_1\right) + x_1 \cdot (-1) = \frac{7}{2} - x_1 - x_1 = \frac{7}{2} - 2x_1.$$

よって，1 階条件は，

$$u' = 0 \iff \frac{7}{2} - 2x_1 = 0 \iff \frac{7}{2} = 2x_1 \iff x_1 = \frac{7}{4}.$$

これを (1) に代入すると，

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{7}{4} = \frac{14}{4} - \frac{7}{4} = \frac{7}{4}.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ $x_1^*, x_2^*$ とすると，

$$x_1^* = x_2^* = \frac{7}{4}$$

であり，そのときの効用を $u^*$ とすると，

$$u^* = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{16}.$$

(2) の $u$ を $x_1$ で 2 階微分すると，

$$u'' = \frac{d^2 u}{dx_1^2} = -2 < 0.$$

よって，$x_1^* = \dfrac{7}{4}$ においても $u'' < 0$ となるので，$x_1^* = x_2^* = \dfrac{7}{4}$ において効用が極大となっている．

- この場合，任意の $x_1$ について $u'' < 0$ なので，$x_1^* = x_2^* = \dfrac{7}{4}$ において効用が最大となっている．

- 2 変数関数 $z = f(x_1, x_2)$ を目的関数として，制約条件 $g(x_1, x_2) = c$ のもとで最適化する．
- **ラグランジュ未定乗数法**を用いて最適化問題を解くには，**ラグランジュ関数**を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \underbrace{f(x_1, x_2)}_{\text{目的関数}} + \lambda \underbrace{[c - g(x_1, x_2)]}_{\text{制約条件}},$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を $x_1, x_2, \lambda$ に関して最適化する．

★ 制約条件は「$\cdots = 0$」の形（陰関数）にしてから，0 でないほうの辺を書く．

★ $\lambda$（「ラムダ」と読む）を**ラグランジュ未定乗数**といい，変数の 1 つとして扱う．

目的関数の説明変数が 2 つで制約条件式が 1 本の場合，**極大・極小**の判断は以下の通り．

- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \lambda = \lambda^*$ において「$L_1 = 0$ かつ $L_2 = 0$ かつ $L_\lambda = 0$（**1 階条件**）」を満たし，かつ，$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \lambda = \lambda^*$ において，「$|\bar{\boldsymbol{H}}| > 0$（**極大化の 2 階条件**）」を満たせば，$x_1 = x_1^*$ と $x_2 = x_2^*$ において目的関数の値は**極大**となる．

  ★ $|\bar{\boldsymbol{H}}|$ は**縁付きヘッセ行列式**で，$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{1\lambda} & L_{2\lambda} \\ L_{1\lambda} & L_{11} & L_{12} \\ L_{2\lambda} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix}$.

- $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \lambda = \lambda^*$ において「$L_1 = 0$ かつ $L_2 = 0$ かつ $L_\lambda = 0$（**1 階条件**）」を満たし，かつ，$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \lambda = \lambda^*$ において，「$|\bar{\boldsymbol{H}}| < 0$（**極小化の 2 階条件**）」を満たせば，$x_1 = x_1^*$ と $x_2 = x_2^*$ において目的関数の値は**極小**となる．

※上記以外の場合，$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \lambda = \lambda^*$ において目的関数が極値をとるか否かは不明．

- 制約条件付き最適化問題において，「目的関数 $z = f(x_1, x_2)$ の**制約条件のもとでの極値**」をラグランジュ未定乗数法により求めるには，「ラグランジュ関数の全ての 1 次偏導関数の値が 0（1 階条件）」を満たす説明変数の値の組み合わせ（停留点）を求め，それを目的関数 $z = f(x_1, x_2)$ に代入する．
- その極値の極大・極小を判断するには，縁付きヘッセ行列式を求め，符号を確認する．

**例題 1.1.1（再掲）**

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

のように与えられる．ここで，$x_1$ は第 1 財の消費量，$x_2$ は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 2，第 2 財の価格が 2，所得が 7 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量およびその消費量のもとでの効用を求めなさい．また，その消費量のもとで効用が**極大**となっていることを確認しなさい．

**解法（ラグランジュ未定乗数法）**

- 最大化したい目的関数：$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.（効用関数）
- 制約条件：$2x_1 + 2x_2 = 7$.（予算制約）

効用最大化問題を，

$$\max_{x_1, x_2} x_1 x_2,$$
$$\text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 = 7$$

と定式化する．この問題を，ラグランジュ未定乗数法を用いて解く．ラグランジュ関数を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \underbrace{x_1 x_2}_{\text{目的関数}} + \lambda \underbrace{(7 - 2x_1 - 2x_2)}_{\text{制約条件}},$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を $x_1, x_2, \lambda$ に関して最適化する．ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を $x_1, x_2, \lambda$ の各変数で偏微分すると，

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda \cdot (-2) = x_2 - 2\lambda,$$
$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \lambda \cdot (-2) = x_1 - 2\lambda,$$
$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 7 - 2x_1 - 2x_2.$$

よって，1 階条件は，

$$L_1 = 0 \Longleftrightarrow x_2 - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow x_2 = 2\lambda, \tag{1}$$
$$L_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 2\lambda, \tag{2}$$
$$L_\lambda = 0 \Longleftrightarrow 7 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \Longleftrightarrow 7 = 2x_1 + 2x_2. \tag{3}$$

これら (1),(2),(3) からなる連立方程式を解く．変数は $x_1, x_2, \lambda$ の 3 つであるが，最適な $x_1$ と $x_2$ を求めたいので，まずは (1) と (2) から $\lambda$ を消去する．(1) を (2) に代入すると，

$$x_1 = x_2. \tag{4}$$

これを (3) に代入すると，

$$7 = 2x_1 + 2 \cdot x_1 = 4x_1 \Longleftrightarrow x_1 = \frac{7}{4}.$$

これを (4) に代入すると，

$$x_2 = \frac{7}{4}.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ $x_1^*, x_2^*$ とすると，

$$x_1^* = x_2^* = \frac{7}{4}$$

であり，そのときの効用を $u^*$ とすると，

$$u^* = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{16}.$$

ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ の $x_1, x_2, \lambda$ に関する 2 次導関数は，

$$L_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0,$$
$$L_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0,$$
$$L_{\lambda\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = 0$$

であり，交差偏導関数は，以下のようになる．

$$L_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 1,$$
$$L_{1\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -2,$$
$$L_{2\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -2.$$

よって，縁付きヘッセ行列式は，

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{1\lambda} & L_{2\lambda} \\ L_{1\lambda} & L_{11} & L_{12} \\ L_{2\lambda} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$|\bar{\boldsymbol{H}}|$ をサラスの方法により計算すると，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \cdot (-2)}_{\text{1 行目から出発，右下がりの 3 要素の積の 3 組の合計}} - [\underbrace{(-2) \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \cdot (-2)}_{\text{3 行目から出発，右上がりの 3 要素の積の 3 組の合計}}] \\ &= 0 + 4 + 4 - (0 + 0 + 0) \\ &= 8 > 0.\end{aligned}$$

よって，$x_1^* = x_2^* = \dfrac{7}{4}$ においても $|\bar{\boldsymbol{H}}| > 0$ となるので，このとき効用が**極大**になっている．

- この問題では，効用関数 $u = x_1 x_2$ が準凹関数である．この場合，1 階条件を満たす $x_1^* = x_2^* = \dfrac{7}{4}$ において，予算制約式 $2x_1 + 2x_2 = 7$ のもとで効用が**最大**になっている．
  ※詳細な説明は内容が高度なため，省略．

---

**例題 1.1.2** 消費者のコブ・ダグラス型効用関数は，

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

のように与えられる．ここで，$x_1$ は第 1 財の消費量，$x_2$ は第 2 財の消費量である．第 1 財の価格が 5，第 2 財の価格が 5，所得が 10 のとき，予算制約のもとで効用を最大化する第 1 財の消費量と第 2 財の消費量およびその消費量のもとでの効用を求めなさい．また，その消費量のもとで効用が**極大**となっていることを確認しなさい．

$\boxed{\text{解法}}$

- 最大化したい目的関数：$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$.（効用関数）
- 制約条件：$5x_1 + 5x_2 = 10$.（予算制約）

効用最大化問題を，

$$\max_{x_1, x_2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{s.t. } 5x_1 + 5x_2 = 10$$

と定式化する．ラグランジュ関数を，

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \underbrace{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}_{\text{目的関数}} + \lambda \underbrace{(10 - 5x_1 - 5x_2)}_{\text{制約条件}}$$

のように設定する．このラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を $x_1, x_2, \lambda$ に関して最適化する．ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ を $x_1, x_2, \lambda$ の各変数で偏微分すると，

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda \cdot (-5) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - 5\lambda, \\
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} x_2^{\frac{1}{2}-1} + \lambda \cdot (-5) = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - 5\lambda, \\
L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 5x_1 - 5x_2.
\end{aligned}$$

よって，1 階条件は，

$$L_1 = 0 \iff \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - 5\lambda = 0 \iff \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = 5\lambda, \tag{1}$$
$$L_2 = 0 \iff \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - 5\lambda = 0 \iff \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = 5\lambda, \tag{2}$$
$$L_\lambda = 0 \iff 10 - 5x_1 - 5x_2 = 0 \iff 10 = 5x_1 + 5x_2. \tag{3}$$

これら (1),(2),(3) からなる連立方程式を解く．変数は $x_1, x_2, \lambda$ の 3 つであるが，最適な $x_1$ と $x_2$ を求めたいので，まずは (1) と (2) から $\lambda$ を消去する．(1) の両辺を (2) の右辺 $5\lambda$ で割ると，

$$\frac{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{5\lambda} = \frac{5\lambda}{5\lambda}.$$

上式の左辺の分母に (2) の左辺を代入すると，(1) を (2) で割った形が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{5\lambda}{5\lambda} \iff & \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = 1 \\
\iff & x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 \\
\iff & x_1^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 \\
\iff & x_1^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \\
\iff & x_1^{-1}x_2 = 1 \\
\iff & \frac{x_2}{x_1} = 1 \\
\iff & x_2 = x_1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

(4) を (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
10 &= 5x_1 + 5 \cdot x_1 \\
&= 10x_1 \\
\iff x_1 &= 1.
\end{aligned}$$

これを (4) に代入すると，

$$x_2 = 1.$$

したがって，効用を最大化する第 1 財と第 2 財の消費量をそれぞれ $x_1^*, x_2^*$ とすると，

$$x_1^* = x_2^* = 1$$

であり，そのときの効用を $u^*$ とすると，

$$u^* = 1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ の $x_1, x_2, \lambda$ に関する 2 次導関数は，

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_1^{-\frac{1}{2}-1} x_2^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}, \\
L_{22} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_2^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{3}{2}}, \\
L_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = 0
\end{aligned}$$

であり，交差偏導関数は，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}-1}x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}, \\
L_{1\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -5, \\
L_{2\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = -5.
\end{aligned}$$

よって，$x_1^* = x_2^* = 1$ のときの縁付きヘッセ行列式は，

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & -\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{2}}\cdot 1^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} \\ -5 & \frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4}\cdot 1^{\frac{1}{2}}\cdot 1^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}.$$

第 2 列の 1 倍を第 3 列に足す（第 3 列を変換する）と，

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \overset{c_3+c_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5-5 \\ -5 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -5 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -5 & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}.$$

これを第 3 列に沿ってラプラス展開すると，

$$\begin{aligned} |\bar{\boldsymbol{H}}| &= -10\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & -\frac{1}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} + 0 + 0 \\ &= -10\begin{vmatrix} -5 & -\frac{1}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \\ &= -10\left\{-5\cdot\frac{1}{4} - (-5)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right\} \\ &= -10\left(-\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right) \\ &= -10\cdot\left(-\frac{10}{4}\right) \\ &= 25 > 0. \end{aligned}$$

よって，$x_1^* = x_2^* = 1$ において $|\bar{\boldsymbol{H}}| > 0$ となるので，このとき効用が**極大**になっている．

- この問題では，効用関数 $u = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ が準凹関数である．この場合，1 階条件を満たす $x_1^* = x_2^* = 1$ において，予算制約式 $5x_1 + 5x_2 = 10$ のもとで効用が**最大**になっている．

............................................................................................................

## 1.2　ラグランジュ未定乗数の経済学的な意味

- 効用最大化問題におけるラグランジュ未定乗数の経済学的な意味を考えるため，効用関数，財価格，所得を一般化して次のように設定する．
  - ★ 効用関数：$u = u(x_1, x_2)$
  - ★ 第 1 財の価格：$p_1$
  - ★ 第 2 財の価格：$p_2$
  - ★ 所得：$m$
- 効用最大化問題は，

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2), \quad \text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

- ラグランジュ関数は，

$$L(x_1,x_2,\lambda) = \underbrace{u(x_1,x_2)}_{\text{目的関数}} + \lambda \underbrace{(m - p_1x_1 - p_2x_2)}_{\text{制約条件}}.$$

このラグランジュ関数 $L(x_1,x_2,\lambda)$ を $x_1,x_2$ の各変数で偏微分すると（$L_\lambda$ は省略），

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda\cdot(-p_1) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - p_1\lambda,$$
$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda\cdot(-p_2) = \frac{\partial u}{\partial x_2} - p_2\lambda.$$

- 1 階条件は，

$$L_1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} - p_1\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1\lambda \Longleftrightarrow \frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda, \tag{1}$$
$$L_2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} - p_2\lambda = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2\lambda \Longleftrightarrow \frac{1}{p_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda, \tag{2}$$

★ 通貨を「円」とし，第 1 財と第 2 財は 1 円でも（分割）購入できるとする．

★ (1) の左辺の $\frac{1}{p_1}$ は第 1 財の価格の逆数．

⇒ $\frac{1}{p_1}$ は「1 円で何単位の第 1 財を購入できるか」を表す．

⇒1 円では $\frac{1}{p_1}$ 単位の第 1 財を購入できる．

★ (1) の左辺の $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ は「第 1 財の量の増加」1 単位当たりの「効用の増加分」．

⇒ $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ は「第 1 財を追加的に 1 単位（購入して）消費すると効用がどの程度増加するか」（第 1 財の**限界効用**）を表す．

★ (1) の左辺 $\frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}$ は，「1 円で購入した第 1 財 $\frac{1}{p_1}$ 単位を消費すると効用がどの程度増加するか」を表す．

⇒「所得が 1 円増加したとき，その 1 円で第 1 財を購入して消費すると効用がどの程度増加するか」，つまり「所得が追加的に 1 円増加すると効用がどの程度増加するか（**所得の限界効用**）」を表す．(1) より，<u>それが**ラグランジュ未定乗数** $\lambda$ に等しい．</u>

※所得が 1 円増加した場合，効用最大化のためには必ず，その 1 円で財を購入・消費する．

★ 第 2 財についても，(2) を用いて同様に考えることができる．

⇒ ラグランジュ未定乗数 $\lambda$ は，効用最大化問題においては**所得の限界効用**の意味をもつ．つまり，

$$\frac{du}{dm} = \lambda.\text{(数学的な証明は略)}$$