応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 2 回：共分散・相関係数

TA：北村友宏 *

2015 年 10 月 13 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. 2 変数データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ について、x の算術平均を $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$、$y$ の算術平均を $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ とする。このとき、

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i$$

を証明しなさい。
Hint：左辺の $(x_i - \overline{x})$ を y_i と $\overline{y}$ に分配した後、$\overline{y}$ が付いている項に対して総和記号の性質を利用する。さらに、算術平均の定義を利用すると、$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ はどうなりますか？

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1.（証明）

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\overline{x})y_i-(x_i-\overline{x})\overline{y}\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})y_i-\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\overline{y}}_{\boxed{\text{消したい}}}\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})y_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\right\}
\end{aligned}$$

ここで、$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ なので、$n\overline{x}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ である。

よって、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}=n\overline{x}-n\overline{x}=0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})y_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\right\} &= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})y_i-\overline{y}\cdot 0\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})y_i. \quad \text{（証明終）}
\end{aligned}$$