応用計量経済分析 TA セッション
第 3 回：1 次元の離散的確率変数

TA：北村友宏 *

2015 年 10 月 20 日

1　確率変数

- ある値をとる変数 X について、X のどの値が実現（発生）するかは確実にはわからないが、その値が出る確率がわかっている変数を**確率変数**（random variable）とよぶ。
  - ⋆「確率がわかっている」を「確率が振られている」と考えてもよい。
  - ⋆ e.g., コイントスの結果（表、裏）、サイコロの目（1、2、3、4、5、6）
    X をコイントスの結果とするならば、表を 1、裏を 0 とすると、

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{with pr. } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

また、サイコロの目を X とするならば、

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } \frac{1}{6}, \\ 2 & \text{with pr. } \frac{1}{6}, \\ \vdots & \\ 6 & \text{with pr. } \frac{1}{6}. \end{cases}$$

- 試行の結果、決定された値を**実現値**とよぶ。
- 統計学では確率変数を大文字、実現値を小文字で表す。
  - ⋆ e.g.,「サイコロの目」という確率変数を X とする。「サイコロを振ると、3 が出た」を数式で $x = 3$ と表す。

2　離散的確率変数

- 離散的な値をとる確率変数を**離散的確率変数**（discrete random variable）とよぶ。
  - ⋆ e.g., コイントスの結果、サイコロの目

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

2.1 確率関数

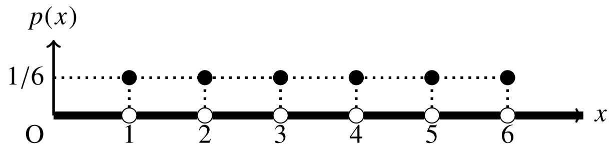
- 各実現値と、それが出る確率の対応を**確率分布**（probability distribution）とよぶ。また、その両者の関係を表す関数を**確率関数**とよぶ。
- $X = x$ となる確率を $P(X = x)$ と書けば、確率関数（の書き方の一例）は

$$p(x) = P(X = x).$$

  ⋆ とりうる値を $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ として、確率関数を $p(x_i) = P(X = x_i)$ などと書くこともある。

例題 1. 「サイコロの目」という確率変数を X とする。X の確率関数を式とグラフで書きなさい。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \forall x = 1, 2, \ldots, 6, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$



- 確率関数の性質

  ① $0 \leq p(x) \leq 1.$

  ② $\displaystyle\sum_x p(x) = 1.$

2.2 累積分布関数

- とりうる実現値について、小さいほうから順に確率関数を積み上げた関数を**累積分布関数**（cumulative distribution function, cdf）とよび、

$$F(x) = P(X \leq x)$$

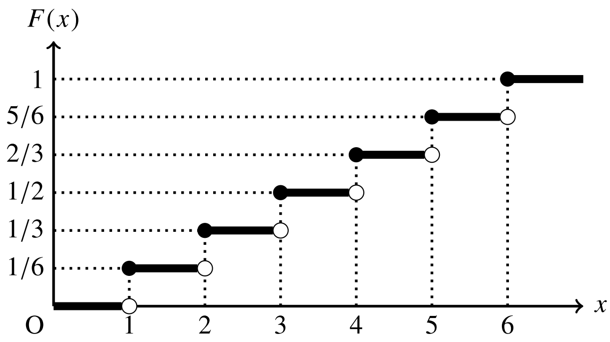
  と書く。

  ⋆ e.g., サイコロを振り、3 以下が出る確率 $F(3) = P(X \leq 3)$ は、1、2、3 が出る確率を足し合わせたもの。つまり

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

例題 2. 「サイコロの目」という確率変数を X とする。X の累積分布関数を式とグラフで書きなさい。
$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{6}$、$F(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$、$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$、$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$、$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{5}{6}$、$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{6}{6} = 1$ であるから、X の累積分布関数は、

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1, \\ \frac{1}{6} & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3} & \text{for } 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{2} & \text{for } 3 \leq x < 4, \\ \frac{2}{3} & \text{for } 4 \leq x < 5, \\ \frac{5}{6} & \text{for } 5 \leq x < 6, \\ 1 & \text{for } 6 \leq x. \end{cases}$$



- 離散的確率変数の累積分布関数の性質
  - ① $0 \leq F(x) \leq 1$.
  - ② 単調非減少関数。
  - ③ 階段状。