応用計量経済分析 TA セッション
第 4 回：多次元の離散的確率変数

TA：北村友宏 *

2015 年 10 月 27 日

※土曜日の講義の進度が TA セッションよりも速くなったため、今回から TA セッションは例題解説と問題演習を中心とする。

1　同時・周辺確率関数

- 離散的確率変数 X と Y の**同時確率関数**（joint probability function）は、

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

- X の**周辺確率関数**（marginal probability function）は、

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

　また、Y の周辺確率関数は、

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y).$$

例題 1.　2 枚のコイン（10 円玉と 100 円玉）を同時に投げる。10 円玉と 100 円玉の落下後の向きをそれぞれ X, Y とし、表が出れば 1、裏が出れば 0 とする。X と Y の同時確率関数、X の周辺確率関数、Y の周辺確率関数を式で書きなさい。
両方とも裏が（**同時に**）出る確率は、$p_{X,Y}(0,0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
10 円玉は裏、100 円玉は表が（**同時に**）出る確率は、$p_{X,Y}(0,1) = P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
10 円玉は表、100 円玉は裏が（**同時に**）出る確率は、$p_{X,Y}(1,0) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
両方とも表が（**同時に**）出る確率は、$p_{X,Y}(1,1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
よって、X と Y の同時確率関数は、

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/4 & \forall (x,y) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

（100 円玉の結果に関係なく）10 円玉は裏が出る確率は、

$$p_X(0) = P(X = 0) = \sum_{y=0}^{1} p_{X,Y}(0,y) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

（100 円玉の結果に関係なく）10 円玉は表が出る確率は、

$$p_X(1) = P(X=1) = \sum_{y=0}^{1} p_{X,Y}(1,y) = p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

よって、X の周辺確率関数は、

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \forall x = 0,1, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

（10 円玉の結果に関係なく）100 円玉は裏が出る確率は、

$$p_Y(0) = P(Y=0) = \sum_{x=0}^{1} p_{X,Y}(x,0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

（10 円玉の結果に関係なく）100 円玉は表が出る確率は、

$$p_Y(1) = P(Y=1) = \sum_{x=0}^{1} p_{X,Y}(x,1) = p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

よって、Y の周辺確率関数は、

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \forall y = 0,1, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

- この例で、X と Y の同時・周辺確率分布を表にすると、

$X \diagdown Y$	0	1	計
0	$p_{X,Y}(0,0)$	$p_{X,Y}(0,1)$	$p_X(0)$
1	$p_{X,Y}(1,0)$	$p_{X,Y}(1,1)$	$p_X(1)$
計	$p_Y(0)$	$p_Y(1)$	1

  ⋆ 同時確率分布の周辺に周辺確率分布が現れる。

- 確率を具体的に書くと、

$X \diagdown Y$	0	1	計
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
計	1/2	1/2	1

2 確率変数の独立性

- 離散的確率変数 X と Y について、**任意の**実現値 (x,y) について、

$$\underbrace{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)}_{\text{同時確率がそれぞれの周辺確率の積。}}$$

  が成り立つとき、X と Y は**独立**（independent）であるという。また、X と Y が独立ならば、

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

  が成り立つ。

★「X と Y は独立」を、$X \perp Y$ と書く。

★ 条件付確率で独立性を定義する場合もある。

$$\forall (x,y), \qquad \underbrace{p_{X|Y}(x \mid Y=y) = p_X(x)}_{\text{条件を与えても与えなくても確率は変わらない。}} \qquad \Leftrightarrow X \perp Y.$$

例題 2.　「例題 1」において、X と Y が独立であるかを確認しなさい。
とりうる実現値 (x,y) は $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ の 4 通りである。これらについて、$p_{X,Y}(x,y)$ と $p_X(x)p_Y(y)$ の関係を確認すると、

$$p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{4} = \underbrace{p_X(0)}_{=1/2}\underbrace{p_Y(0)}_{=1/2}, \qquad p_{X,Y}(0,1) = \frac{1}{4} = \underbrace{p_X(0)}_{=1/2}\underbrace{p_Y(1)}_{=1/2},$$

$$p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{4} = \underbrace{p_X(1)}_{=1/2}\underbrace{p_Y(0)}_{=1/2}, \qquad p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{4} = \underbrace{p_X(1)}_{=1/2}\underbrace{p_Y(1)}_{=1/2}.$$

よって、任意の実現値について $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ が成立しているので、X と Y は独立である。
※「任意の」が重要。独立と言うには、とりうる実現値全てについて、独立性の定義の式が成り立つ必要がある。