応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 5 回：標本平均の分布

TA：北村友宏 *

2015 年 11 月 10 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. 無作為標本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を考える。$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu, V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = \sigma^2$ とする。また、この標本の標本平均を $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。

   （a）次の等式
   $$E\left(\overline{X}\right) = \mu$$
   を証明しなさい。

   （b）次の等式
   $$V\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$
   を証明しなさい。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　 URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1.（a）（証明）

$$
\begin{aligned}
E\left(\overline{X}\right) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= E\left[\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)\right] \\
&= E\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right) \\
&= \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_n) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\mu + \frac{1}{n}\cdot\mu + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\mu \\
&= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) \\
&= \frac{1}{n}\cdot n\mu \\
&= \mu. \quad \text{（証明終）}
\end{aligned}
$$

- 無作為標本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ について、$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$ のとき、標本平均の期待値 $E\left(\overline{X}\right)$ も μ となる。

（b）（証明）

$$
\begin{aligned}
V\left(\overline{X}\right) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= V\left[\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)\right] \\
&= V\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right).
\end{aligned}
$$

ここで、$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は無作為標本なので、$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立である。よって、

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_2) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}. \quad \text{（証明終）}
\end{aligned}
$$

- 無作為標本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ について、$V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = \sigma^2$ のとき、標本平均の分散 $V\left(\overline{X}\right)$ は $\dfrac{\sigma^2}{n}$ となる。