応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 6 回：標本分散の分布

TA：北村友宏 *

2015 年 11 月 17 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. 母集団から抽出した大きさ n の無作為標本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を考える。母平均 μ は <u>既知</u> で、$\mu = 5$ であるとする。ただし、母分散 σ^2 は未知とする。

   （a）$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - 5)^2$ とする。このとき、

   $$E\left(s^2\right) \neq \sigma^2$$

   となることを証明しなさい。

   Hint :「（証明）$E\left(s^2\right) =$」で始め、s^2 の期待値を求める。このとき、総和記号の中にある 2 乗の部分を展開する必要はない。X_1 から X_n までのそれぞれの分散（の定義）を足し合わせた形に持っていく。

   （b）$s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - 5)^2$ とする。このとき、

   $$E\left(s^2\right) = \sigma^2$$

   となることを証明しなさい。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1.（a）（証明）

$$
\begin{aligned}
E\left(s^2\right) &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}E\left[(X_1-5)^2+(X_2-5)^2+\cdots+(X_n-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\underbrace{E(X_1-5)^2}_{=V(X_1)}+\underbrace{E(X_2-5)^2}_{=V(X_2)}+\cdots+\underbrace{E(X_n-5)^2}_{=V(X_n)}\right] \\
&= \frac{1}{n-1}[V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)].
\end{aligned}
$$

ここで、母分散は σ^2 なので、$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}[V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)] &= \frac{1}{n-1}\left(\underbrace{\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2}_{n\ 個}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot n\sigma^2.
\end{aligned}
$$

となる。したがって、$E\left(s^2\right)\neq\sigma^2$ である。（証明終）

（b）（証明）

$$
\begin{aligned}
E\left(s^2\right) &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[(X_1-5)^2+(X_2-5)^2+\cdots+(X_n-5)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(X_1-5)^2}_{=V(X_1)}+\underbrace{E(X_2-5)^2}_{=V(X_2)}+\cdots+\underbrace{E(X_n-5)^2}_{=V(X_n)}\right] \\
&= \frac{1}{n}[V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)] \\
&= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2}_{n\ 個}\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 \\
&= \sigma^2. \quad （証明終）
\end{aligned}
$$

- 実際にはあり得ないが、もし（母集団全体を観察できない場合に）母平均 μ が既知であれば μ を推定する必要はない。この場合、標本分散を $s^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ とすれば、$E\left(s^2\right)=\sigma^2$ となる。