応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 7 回：正規母集団に関する分布

TA：北村友宏 *

2015 年 11 月 24 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団（平均 μ、分散 σ^2 の正規母集団）から抽出した大きさ n の無作為標本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を考える。μ は未知であるが、σ^2 は既知とする。
   (a) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。Y の分布を求めなさい。
   (b) X_i の標本平均を $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \cdot Y$ とする。(a) の結果を利用し、$\overline{X}$ の分布（$\frac{1}{n} \cdot Y$ の分布）を求めなさい。
   (c) $\overline{X}$ を標準化したものを $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ とする。このとき、(b) の結果を利用し、Z が標準正規分布に従うことを証明しなさい。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1.（a）$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団からの標本なので、任意の i について $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ である。よって、

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu,$$
$$V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = \sigma^2$$

となる。また、$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は無作為標本なので互いに独立である。したがって、正規分布の再生性より、

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{n\text{ 個}}, \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n\text{ 個}}\right),$$

つまり、

$$Y \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

である。

（b）（a）より、$Y \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ なので、$E(Y) = n\mu, V(Y) = n\sigma^2$ である。よって、

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot Y \sim N\left(\frac{1}{n} \cdot n\mu, \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2\right),$$

つまり、

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

である。

（c）（証明）

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \cdot \overline{X} - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}.$$

（b）より、$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ なので、$E\left(\overline{X}\right) = \mu, V\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$ である。よって、

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \cdot \overline{X} - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \cdot \mu - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}, \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \cdot \mu - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma^2/n}\right)^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\sigma^2/n} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

である。したがって、

$$Z \sim N(0, 1)$$

となる。これは Z が標準正規分布に従うことを意味する。（証明終）