応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 8 回：点推定

TA：北村友宏 *

2015 年 12 月 1 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団から抽出した大きさ 3 の無作為標本 (X_1, X_2, X_3) を考える。μ の推定量を

$$\widetilde{X} = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

とする。

（a）$\widetilde{X}$ の期待値を求め、この推定量が不偏推定量であるかを判断しなさい。

（b）$\widetilde{X}$ の分散を求めなさい。

2. $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団から抽出した大きさ 3 の無作為標本 (X_1, X_2, X_3) を考える。μ の推定量を

$$\mu_W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3$$

とする。μ_W が μ の不偏推定量であるための条件を求め、式で答えなさい。

Hint：まず、1.（a）と同様の方法で、$E(\mu_W)$ を求める。出てきた式を見て、μ_W が μ の 不偏 推定量であるためにはどのようでなければいけないかを考える（有効推定量である必要はない）。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1.（a）(X_1, X_2, X_3) は $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団からの無作為標本なので、

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \mu, V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = \sigma^2$$

である。よって、$\widetilde{X}$ の期待値は、

$$E\left(\widetilde{X}\right) = E\left(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{3}{4}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu = \frac{5}{4}\mu$$

となる。したがって、

$$E\left(\widetilde{X}\right) \neq \mu$$

となり、期待値が母数 μ に等しくないので、$\widetilde{X}$ は不偏推定量ではない。

（b）(X_1, X_2, X_3) は無作為標本なので X_1 と X_2 と X_3 は互いに独立である。よって、$\widetilde{X}$ の分散は、

$$\begin{aligned}
V\left(\widetilde{X}\right) &= V\left(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 V(X_2) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X_3) \\
&= \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{9}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 \\
&= \frac{11}{16}\sigma^2
\end{aligned}$$

である。

2. μ_W の期待値は、

$$\begin{aligned}
E(\mu_W) &= E(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3) \\
&= w_1E(X_1) + w_2E(X_2) + w_3E(X_3) \\
&= w_1\mu + w_2\mu + w_3\mu \\
&= (w_1 + w_2 + w_3)\mu
\end{aligned}$$

である。よって、

$$E(\mu_W) = \mu$$

となるためには、

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

でなければならない。したがって、μ_W が μ の不偏推定量であるための条件は、

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

である。