応用計量経済分析 TA セッション
第 8 回：点推定

TA：北村友宏 *

2015 年 12 月 1 日

1　母数の推定

- 母集団分布の特性（平均や分散など）を数値で表したものを**母数**とよぶ。
  - ⋆ e.g., 母平均、母分散
- 標本から母数を定めることを**推定**（estimation）という。
- 母数をある 1 つの値で推定することを**点推定**（point estimation）という。
  - ⋆ e.g., 標本平均を計算し、「その値（1 つ）が母平均に近い値だろう」と定める。
- 標本の関数を**統計量**（statistic）とよぶ。
  - ⋆ e.g., 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- 統計量の実現値を**統計値**とよぶ。
  - ⋆ e.g., 標本平均の実現値 $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- 母数を推定するための統計量を**推定量**（estimator）とよぶ。
- 推定量の実現値を**推定値**（estimate）とよぶ。
- 推定量の標準偏差を**標準誤差**（standard error）とよぶ。
  - ⋆ 推定量とパラメータ（ここでは母数）の隔たり（誤差の程度）を表す。
  - ⋆ 推定量の標準偏差の推定値を標準誤差とよぶこともある。
  - ⋆ e.g., 標本平均の標準誤差は $\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$. その推定値は $\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}$. ただし、$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

2　不偏性

- 期待値が母数に等しい推定量を**不偏推定量**（unbiased estimator）とよび、その性質を**不偏性**（unbiasedness）とよぶ。
  - ⋆ e.g., 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ で母平均 μ を推定すると、すでに見たように、

$$E\left(\overline{X}\right) = \mu$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

となるので、$\overline{X}$ は μ の不偏推定量。

また、標本分散 $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ で母分散 σ^2 を推定すると、すでに見たように、

$$E\left(s^2\right) = \sigma^2$$

となるので、s^2 は σ^2 の不偏推定量。

★ **小標本**（small sample, 観測値数が少ない標本）において母数を推定する際には、用いる推定量が最低限、不偏性を満たしていることが望ましい。

3 有効性

- 不偏推定量の中で分散が最小の推定量を**有効推定量**（efficient estimator）とよび、その性質を**有効性**（efficiency）とよぶ。
  - ★ 有効推定量を「効率推定量」や「最小分散不偏推定量」とよぶこともある。
  - ★ 正規母集団であれば標本平均 $\overline{X}$ は母平均 μ の有効推定量（証明略）。
  - ★ 小標本において母数を推定する際には、用いる推定量が不偏性の他に有効性を満たしていればなおさら望ましい。

例題 1. $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団から大きさ 2 の無作為標本 (X_1, X_2) を抽出した。μ の推定量として、次の 3 つを考える。

$$A = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2; B = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2; C = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2.$$

これらのうち、μ の不偏推定量であるのはどれかを答えなさい。また、それぞれの推定量の分散を求めなさい。

(X_1, X_2) は $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ の母集団からの無作為標本なので、

$$E(X_1) = E(X_2) = \mu, V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2$$

である。A, B, C のそれぞれの期待値を計算すると、

$$\begin{aligned}
E(A) &= E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu,\\
E(B) &= E\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu,\\
E(C) &= E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\mu = \frac{2}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu = \frac{3}{4}\mu \neq \mu
\end{aligned}$$

となる。よって、期待値が母数 μ に等しいのは A と B なので、μ の不偏推定量は A と B である。

また、(X_1, X_2) は無作為標本なので X_1 と X_2 は互いに独立である。よって、それぞれの推定量の分散は、

$$\begin{aligned}
V(A) &= V\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X_2) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{2}{4}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2},\\
V(B) &= V\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V(X_2) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{4}{9}\sigma^2 = \frac{5}{9}\sigma^2,\\
V(C) &= V\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X_2) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{4}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{5}{16}\sigma^2
\end{aligned}$$

である。

$\boxed{\text{この結果から分かること}}$ 不偏推定量は 1 つとは限らない。この問題では A と B の 2 つ見つかったが、それぞれの分散は異なっている。推定量 C は「A と B」（不偏）に比べ分散が小さいが、C は不偏ではない。