

応用計量経済分析 TA セッション 練習問題

第 9 回：区間推定

TA：北村友宏*

2015年12月8日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. ある機械で作られる、第 i 番目の製品の重さ（単位：g）を X_i とし、その母集団分布を $N(\mu, \sigma^2)$ とする。（母平均 μ と）母分散 σ^2 は 未知 である。完成した製品の中から、製品を無作為に 18 個抽出した。その標本を $(X_1, X_2, \dots, X_{18})$ とする。標本平均を計算すると $\bar{x} = 105$ であり、標本（不偏）分散を計算すると $s^2 = 2$ であった。重さの母平均 μ の信頼度 99% の信頼区間を求めなさい。

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

練習問題解答

1. $(X_1, X_2, \dots, X_{18})$ は $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本なので、任意の $i = 1, 2, \dots, 18$ について

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

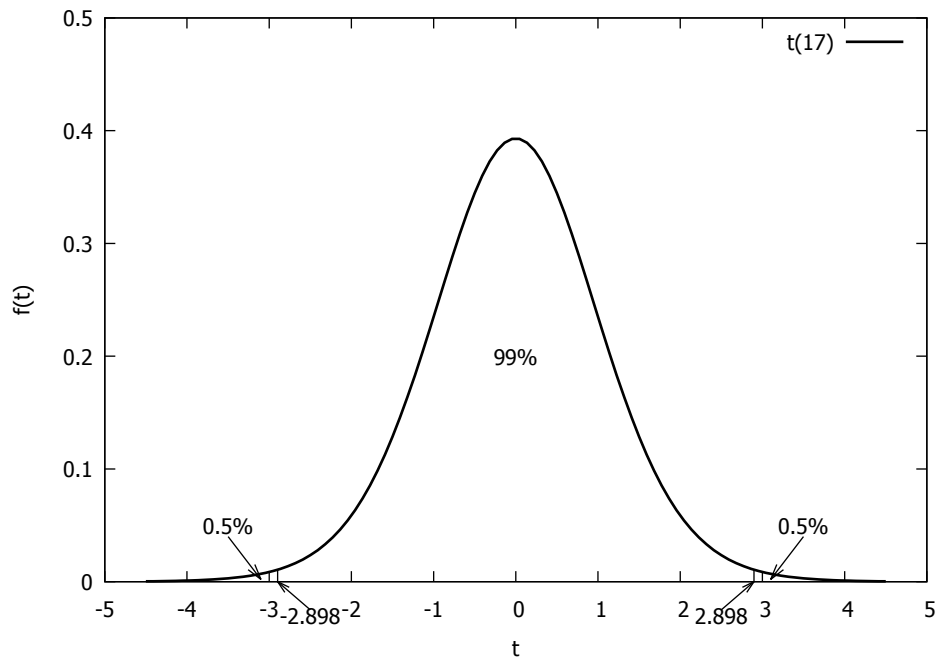
である。標本の大きさは 18 なので、標本平均の分布は

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{18}\right)$$

である。標準化し、母分散を標本分散で置き換えると、

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/18}} \sim t(17)$$

となる。



t 分布表より、 $t(17)$ において $P(|T| > t) = 0.01$, つまり $P(T > t) = 0.005$ を満たす t は 2.898 なので、

$$\begin{aligned}
 & P\left(-2.898 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/18}} \leq 2.898\right) = 0.99 \\
 \Leftrightarrow & P\left(-2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}} \leq \bar{X} - \mu \leq 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}\right) = 0.99 \\
 \Leftrightarrow & P\left(-\bar{X} - 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}\right) = 0.99 \\
 \Leftrightarrow & P\left(\bar{X} + 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}} \geq \mu \geq \bar{X} - 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}\right) = 0.99 \\
 \Leftrightarrow & P\left(\underbrace{\bar{X} - 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}}_{\mu \text{ が } \left[\bar{X} - 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}, \bar{X} + 2.898\sqrt{\frac{S^2}{18}}\right] \text{ に入る確率}}\right) = \underbrace{0.99}_{99\%}.
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 \bar{X} に実現値 $\bar{x} = 105$ を、 S^2 に実現値 $s^2 = 2$ を代入して信頼区間を書くと、

$$\left[105 - 2.898\sqrt{\frac{2}{18}}, 105 + 2.898\sqrt{\frac{2}{18}}\right]$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 105 - 2.898\sqrt{\frac{2}{18}} &= 105 - 2.898\sqrt{\frac{1}{9}} = 105 - 2.898 \cdot \frac{1}{3} = 105 - 0.966 = 104.034, \\
 105 + 2.898\sqrt{\frac{2}{18}} &= 105 + 2.898\sqrt{\frac{1}{9}} = 105 + 2.898 \cdot \frac{1}{3} = 105 + 0.966 = 105.966
 \end{aligned}$$

なので、 μ の信頼度 99% の信頼区間は $[104.034, 105.966]$ である。