

応用計量経済分析 TA セッション

第 11 回：母平均の検定（母分散が既知の場合）

TA：北村友宏*

2015 年 12 月 22 日

1 帰無仮説の受容・棄却

- 標本の関数を統計量 (statistic) とよぶ。
- 仮説検定に用いる統計量を検定統計量 (test statistic) とよぶ。
- 検定統計量の実現値を検定統計値とよぶ。
- H_0 を受容する検定統計量の領域を受容域 (acceptance region) とよぶ。
 - ★「採択域」とよぶこともある。
- H_0 を棄却する検定統計量の領域を棄却域 (critical region) とよぶ。
- 受容域と棄却域の境界点を有意点とよぶ。
 - ★「棄却点」や「臨界値」とよぶこともある。

2 母平均の検定

例題 1. ある部品は機械を用いて、重さが 15g となるように作られている。ところが、作られた部品を無作為に 32 個選び、重さを測定したところ、標本平均が 16g となった。機械に不具合があるのだろうか。それを有意水準 5% で検定しなさい。ただし、部品の重さは正規分布に従い、母分散は 2 で既知とする。

- $16 - 15 = 1\text{g}$ の差は、機械の不具合により生じた差かもしれないし、通常生じうる誤差の範囲内で偶然生じた差かもしれない。
 - ⇒ 仮説検定で、どちらのタイプの差なのかを検証。
 - ⇒ 「設定よりも重く作られるのか」ではなく単に「機械に不具合があるか」を検定したいので、両側検定をする。

Step 1: H_0 と H_1 を設定する

部品の重さの母平均を μ として、帰無仮説と対立仮説をそれぞれ、

$$H_0: \mu = 15,$$

$$H_1: \mu \neq 15$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

と設定する。※ H_0 は必ず等号を含むように設定！

Step 2：検定統計量を選択し、 H_0 のもとでの分布を求める

無作為に選んだ部品 32 個の重さをそれぞれ X_1, X_2, \dots, X_{32} とすると、それらが母分散 2 の正規分布に従っていることから、任意の i について

$$X_i \sim N(\mu, 2)$$

である。よって、標本平均の分布は、無作為標本なので

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{2}{32}\right)$$

となる。標準化すると、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{2/32}} \sim N(0, 1)$$

となる。 $H_0: \mu = 15$ が真であると仮定すると、 H_0 のもとでの検定統計量は、

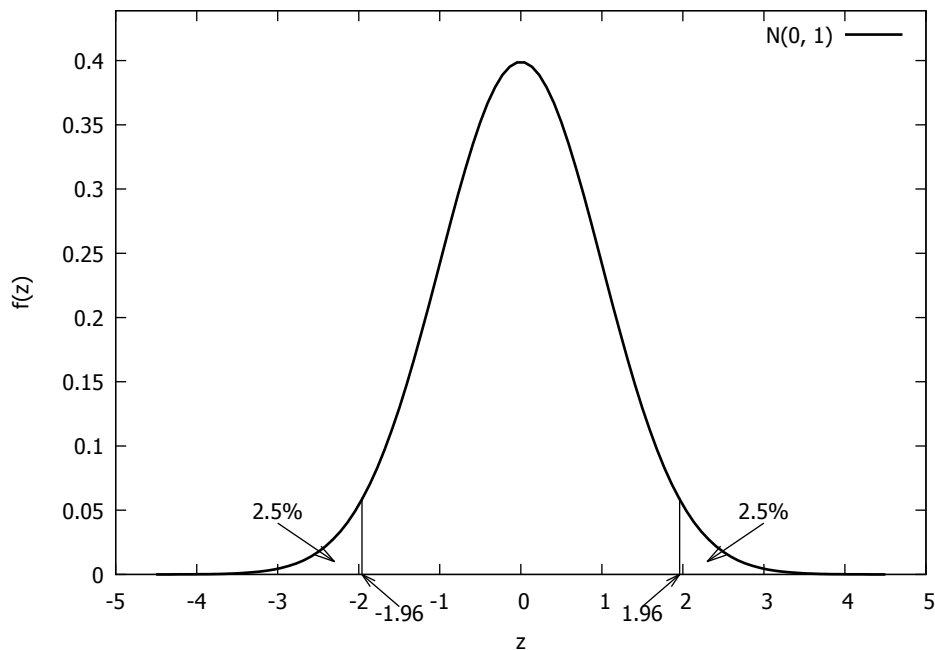
$$\frac{\bar{X} - 15}{\sqrt{2/32}} \sim N(0, 1)$$

である。※母分散が既知なので $N(0, 1)$

Step 3：有意水準を設定する

上記の検定統計量を用い、有意水準 5% の検定を行う。

Step 4：受容域・棄却域・有意点を定める



標準正規分布表より、 $P(Z > 1.96) = 0.025$ 、つまり $P(|Z| > 1.96) = 0.05$ なので、有意水準 5% の両側検定における、 $N(0, 1)$ に従う検定統計量の受容域は

$$[-1.96, 1.96]$$

であり、棄却域は、

$$(-\infty, -1.96), (1.96, \infty)$$

である。よって、有意点は ± 1.96 となる。

Step 5 : 検定統計値を求め、 H_0 の受容・棄却を判断する

標本平均が 16 となったことから、検定統計値は、

$$\frac{16 - 15}{\sqrt{2/32}} = \frac{1}{\sqrt{1/16}} = \frac{1}{1/4} = 4$$

である。 $4 > 1.96$ なので、検定統計値は棄却域に入る（※ H_0 を偽とする証拠）。これは、仮に $\mu = 15$ (H_0 が真)であれば、4 という検定統計値が実現する確率は 5% 以下にすぎないので、 $H_0 : \mu = 15$ が疑わしいことを意味する。

したがって、 $H_0 : \mu = 15$ は有意水準 5% で棄却され、機械に不具合が発生している可能性がある。

- H_0 が受容されるケース：もし重さの標本平均が 15.4g であれば、検定統計値は

$$\frac{15.4 - 15}{\sqrt{2/32}} = \frac{0.4}{\sqrt{1/16}} = \frac{0.4}{1/4} = 4 \cdot 0.4 = 1.6$$

となり、受容域に入る。この場合、仮に $\mu = 15$ (H_0 が真)であれば、1.6 という検定統計値は小さすぎない確率で実現しうることになり、 H_0 が有意水準 5% で受容され、機械に不具合があるとはいえないという判断になる。