

応用計量経済分析 TA セッション 練習問題

第 12 回：母平均の検定（母分散が未知の場合）

TA：北村友宏*

2016 年 1 月 5 日

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. ある機械は、棒を長さ 109cm に切断するように設定されている。ところが、切断された棒を無作為に 16 本選び、長さを測定したところ、標本平均が 109.5cm、標本（不偏）分散が 1 となった。標本平均が設定の長さとは異なるということは、機械に不具合があるのだろうか。長さの母平均を μ とし、帰無仮説と対立仮説をそれぞれ、

$$H_0 : \mu = 109,$$

$$H_1 : \mu \neq 109$$

と設定して、機械に不具合があるかを有意水準 1% で検定しなさい。ただし、棒の長さは正規分布に従い、母分散は 未知 とする。

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

練習問題解答

1. 棒の長さの母平均を μ として、帰無仮説と対立仮説をそれぞれ、

$$H_0 : \mu = 109,$$

$$H_1 : \mu \neq 109$$

と設定する。

無作為に選んだ棒 16 本の長さをそれぞれ X_1, X_2, \dots, X_{16} とし、長さの母分散を σ^2 とすると、棒の長さが正規分布に従っていることから、任意の i について、

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

である。よって、標本平均の分布は、無作為標本なので、

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{16}\right)$$

となる。標準化すると、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/16}} \sim N(0, 1)$$

となる。ここで、母分散 σ^2 が未知なので、標本（不偏）分散 S^2 を用いた式で統計量を書くと、

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/16}} \sim t(15)$$

となる。 $H_0 : \mu = 109$ が真であると仮定すると、 H_0 のもとでの検定統計量は、

$$\frac{\bar{X} - 109}{\sqrt{S^2/16}} \sim t(15)$$

である。

上記の検定統計量を用い、有意水準 1% の検定を行う。

t 分布表より、 $P(T > 2.947) = 0.005$, つまり $P(|T| > 2.947) = 0.01$ なので、有意水準 1% の両側検定における、 $t(15)$ に従う検定統計量の受容域は、

$$[-2.947, 2.947]$$

であり、棄却域は、

$$(-\infty, -2.947), (2.947, \infty)$$

である。よって、有意点は ± 2.947 となる。

標本平均が 109.5、標本分散が 1 となったことから、検定統計値は、

$$\frac{109.5 - 109}{\sqrt{1/16}} = \frac{0.5}{\sqrt{1/16}} = \frac{0.5}{1/4} = 2$$

である。 $-2.947 < 2 < 2.947$ なので、検定統計値は受容域に入る。これは、 $\mu = 109$ (H_0 が真) のとき、2 という検定統計値は小さすぎない確率で実現しうことを意味する。

したがって、 $H_0 : \mu = 109$ は有意水準 1% で受容され、機械に不具合があるとはいえない。