

応用計量経済分析 TA セッション

第 12 回：母平均の検定（母分散が未知の場合）

TA：北村友宏*

2016 年 1 月 5 日

1 母平均の検定

例題 1. ある部品は機械を用いて、重さが 15g となるように作られている。ところが、作られた部品を無作為に 24 個選び、重さを測定したところ、標本平均が 16g、標本（不偏）分散が 6 となった。標本平均が設定の重さと異なるということは、機械に不具合があるのだろうか。それを有意水準 5% で検定しなさい。ただし、部品の重さは正規分布に従い、母分散は未知とする。

- 16-15=1g の差は、機械の不具合によるものなのか、それとも通常生じうる誤差の範囲内なのかを仮説検定で検証。
⇒「設定よりも重く作られるのか」ではなく単に「機械に不具合があるか」を検定したいので、両側検定をする。

Step 1： H_0 と H_1 を設定する

部品の重さの母平均を μ として、帰無仮説と対立仮説をそれぞれ、

$$H_0 : \mu = 15,$$

$$H_1 : \mu \neq 15$$

と設定する。

Step 2：検定統計量を選択し、 H_0 のもとでの分布を求める

無作為に選んだ部品 24 個の重さをそれぞれ X_1, X_2, \dots, X_{24} とし、重さの母分散を σ^2 とすると、部品の重さが正規分布に従っていることから、任意の i について、

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

である。よって、標本平均の分布は、無作為標本なので、

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{24}\right)$$

となる。標準化すると、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/24}} \sim N(0, 1)$$

* Email: kitamu.tom@gmail.com URL: <http://tomkitamura.html.xdomain.jp>

となる。ここで、母分散 σ^2 が未知なので、標本（不偏）分散 S^2 を用いた式で統計量を書くと、

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/24}} \sim t(\underbrace{23}_{=24-1})$$

となる（証明略）。※ \bar{X} の分布が正規分布であってもこの統計量の分布は t 分布。

$H_0: \mu = 15$ が真であると仮定すると、 H_0 のもとでの検定統計量は、

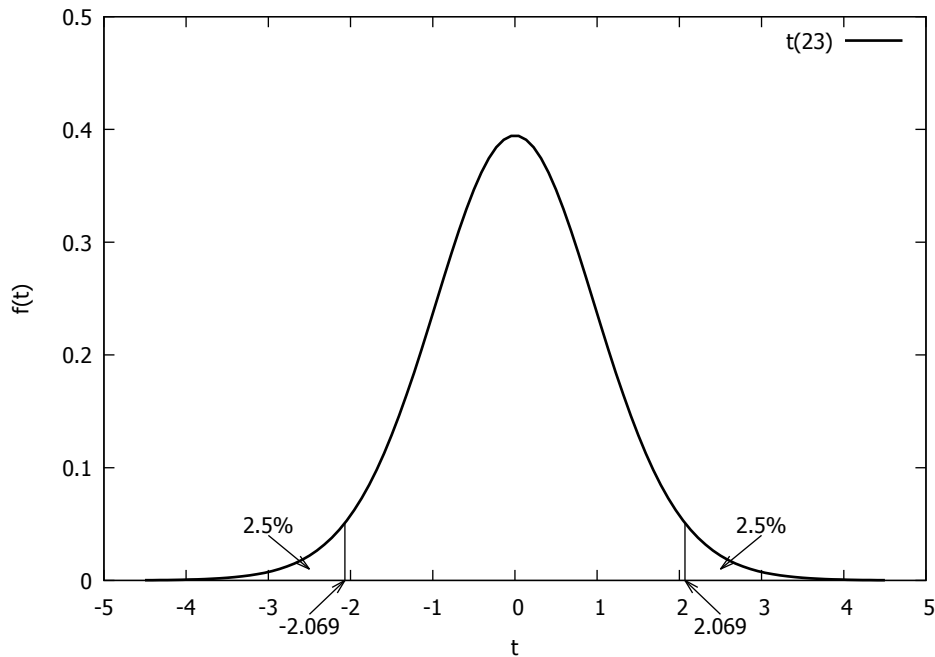
$$\frac{\bar{X} - 15}{\sqrt{S^2/24}} \sim t(23)$$

である。

Step 3: 有意水準を設定する

上記の検定統計量を用い、有意水準 5% の検定を行う。

Step 4: 受容域・棄却域・有意点を定める



t 分布表より、 $P(T > 2.069) = 0.025$, つまり $P(|T| > 2.069) = 0.05$ なので、有意水準 5% の両側検定における、 $t(23)$ に従う検定統計量の受容域は、

$$[-2.069, 2.069]$$

であり、棄却域は、

$$(-\infty, -2.069), (2.069, \infty)$$

である。よって、有意点は ± 2.069 となる。

Step 5: 検定統計値を求め、 H_0 の受容・棄却を判断する

標本平均が 16、標本分散が 6 となったことから、検定統計値は、

$$\frac{16 - 15}{\sqrt{6/24}} = \frac{1}{\sqrt{1/4}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

である。 $-2.069 < 2 < 2.069$ なので、検定統計値は受容域に入る。これは、仮に $\mu = 15$ (H_0 が真) であれば、2 という検定統計値は小さすぎない確率で実現しうることを意味する。

したがって、 $H_0 : \mu = 15$ は有意水準 5% で受容され、機械に不具合があるとはいえない。

- H_0 が棄却されるケース：もし重さの標本平均が 16.1g であれば、検定統計値は

$$\frac{16.1 - 15}{\sqrt{6/24}} = \frac{1.1}{\sqrt{1/4}} = \frac{1.1}{1/2} = 2 \cdot 1.1 = 2.2$$

となり、棄却域に入る。この場合、仮に $\mu = 15$ (H_0 が真) であれば、2.2 という検定統計値が実現する確率は 5% 以下にすぎないことになり、 H_0 が有意水準 5% で棄却され、機械に不具合が発生している可能性があるという判断になる。