応用計量経済分析 TA セッション　練習問題
第 13 回：線形回帰モデルにおける仮説検定

TA：北村友宏 *

2016 年 1 月 26 日改訂

教科書やノートなどを参照しても構いません。

1. 定数項のない単回帰モデル

$$y_i = \beta x_i + u_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$u_i \sim iidN\left(0, \sigma^2\right)$$

を考える。β の OLS 推定量は、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

と表される。この $\hat{\beta}$ が正規分布に従うことを証明しなさい。ただし、簡単化のため、説明変数 x_i は非確率変数であるとする。
Hint：$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a$ とおけば簡潔な表記ができ、証明しやすくなる。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

練習問題解答

1. （証明）問題より、$u_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ であり、x_i は非確率変数なので、正規分布の性質より、任意の i について、

$$\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot u_i \sim N\left(0, \left[\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right]^2 \cdot \sigma^2\right)$$

である。$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = a$ とおくと、

$$\frac{x_i}{a} \cdot u_i \sim N\left(0, \left[\frac{x_i}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2\right)$$

となる。$i = 1, 2, \ldots, n$ について合計すると、$u_1, u_2, \ldots, u_n$ は互いに独立なので、正規分布の再生性より、

$$\frac{x_1}{a} \cdot u_1 + \frac{x_2}{a} \cdot u_2 + \cdots + \frac{x_n}{a} \cdot u_n \sim N\left(0 + 0 + \cdots + 0, \left[\frac{x_1}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2 + \left[\frac{x_2}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2 + \cdots + \left[\frac{x_n}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2\right),$$

つまり、

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a} \cdot u_i \sim N\left(0, \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2\right)$$

となる。ここで、

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a} \cdot u_i = \frac{1}{a} \cdot \sum_{i=1}^n x_i u_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{a},$$
$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{a}\right]^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \sigma^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{=a} = \frac{\sigma^2 a}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a}$$

なので、

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{a} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{a}\right)$$

である。よって、正規分布の性質より、

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{a} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{a}\right)$$

となる。

したがって、$\hat{\beta}$ は正規分布に従う（証明終）。

- この定数項なしの単回帰モデルでは推定するパラメータが 1 個なので、$H_0 : \beta = 0$ を検定する検定統計量は、

$$\frac{\hat{\beta}}{SE\left(\hat{\beta}\right)} \sim t(n-1)$$

となる。