応用計量経済分析 TA セッション
第 15 回：弾力性の推定と検定

TA：北村友宏 *

2016 年 1 月 26 日

1　弾力性

- 説明変数と被説明変数の自然対数をとった単回帰モデルを
$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$
とする。
- 係数 β_1 は、$\ln y_i$ を $\ln x_i$ で微分したものと考えることもできる。つまり、
$$\beta_1 = \frac{d \ln y_i}{d \ln x_i}. \tag{2}$$
  ⋆ ここで、
$$\frac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}} \tag{3}$$
となる。
（証明）
$$\frac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \frac{d \ln y_i}{dy_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{d \ln x_i} = \frac{d \ln y_i}{dy_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{1}{\frac{d \ln x_i}{dx_i}}.$$
ここで、自然対数の微分の公式から、$\dfrac{d \ln y_i}{dy_i} = \dfrac{1}{y_i}$, $\dfrac{d \ln x_i}{dx_i} = \dfrac{1}{x_i}$ なので、
$$\frac{d \ln y_i}{dy_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{1}{\frac{d \ln x_i}{dx_i}} = \frac{1}{y_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x_i}} = \frac{1}{y_i} \cdot \frac{dy_i}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{dy_i}{y_i} \cdot \frac{1}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$$
となる。したがって、$\dfrac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ である。（証明終）
(2) と (3) から、$\beta_1 = \dfrac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$.
  ⋆ dx_i は x_i が微小に増加したときの x_i の増加量を、dy_i は y_i が微小に増加したときの y_i の増加量をそれぞれ表している。

* Email: kitamu.tom@gmail.com　URL: http://tomkitamura.html.xdomain.jp

- ⋆ $\frac{dx_i}{x_i}$ は（x_i が微小に増加したときの）x_i の増加率を、$\frac{dy_i}{y_i}$ は（y_i が微小に増加したときの）y_i の増加率をそれぞれ表している。
  $\Rightarrow\ \beta_1 = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{（y_i の増加率）}{（x_i の増加率）}.$
  $\Rightarrow\ \beta_1$, つまり $\frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ は、x_i が 1% 増加したときに y_i が何 % 増加するかを表す。これを「y_i の x_i に対する**弾力性**（elasticity）」または「y_i の x_i 弾力性」とよぶ。
    - ∗ e.g., 需要の価格に対する弾力性、需要の価格弾力性
    - ∗ 弾力性が β_1 であれば、x_i が 1% 増加すると y_i は β_1% 増加する。
- 以上より、(1) における $\ln x_i$ の係数 β_1 は、y_i の x_i に対する弾力性を表す。
  - ⋆ ただし、β_1 は未知なので、β_1 を推定すれば y_i の x_i に対する弾力性を推定できる。
    - ∗ e.g., β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1$ が、y_i の x_i に対する弾力性の推定値となる。
  - ⋆ さらに、(1) の誤差項 u_i の分布を仮定し、$\beta_1 = 0$ を H_0 とする仮説検定を行えば、弾力性が 0 と異なるか（y_i は x_i に反応するか）を検証できる。

例題 1.　単回帰モデル

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

を OLS で推定したところ、係数 β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1$ が 0.65 となった。この結果から、y_i の x_i に対する弾力性はいくらであると推定されたかを答えなさい。また、この場合の弾力性の推定値の解釈を述べなさい。

$\hat{\beta}_1$ が 0.65 となったことから、y_i の x_i に対する弾力性は 0.65 であると推定された。
この場合の弾力性の推定値の解釈は、「x_i が 1% 増加すると y_i は平均的に 0.65% 増加する」となる。

※「65% 増加」ではなく「0.65% 増加」であることに注意！